



החוג למתמטיקה, מכללה ירושלים
האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב הגמר
 Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



ב' בסיוון תשע"ו

בס"ד

משתתפת יקרה
 אנו מברכים אותך על השתתפותך בשלב הגמר של האולפניאדה המתמטית, ומאחלים לך הצלחה.
 בטרום תפני לשאלות, מלאי נא את הפרטים שבעמוד זה.

שם המשתתפת: _____

לתלמידת בית ספר:	לבת שרות לאומי:
_____	_____
הכיתה:	מקום השרות:
_____	_____
בית הספר:	בוגרת בית הספר:
_____	_____

הכתובת האישית: _____

מספר הטלפון: _____ מספר הטלפון הנייד: _____

כתובת דוא"ל: _____

שאלון שלב הגמר מורכב משני חלקים.

עם סיום פתרון השאלות והקפת התשובות הנכונות במעגל בחלק הראשון, חזרי נא לעמוד זה ורכזי את תשובותייך בטבלה הבאה:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	מספר שאלה
										התשובה הנכונה

את התשובות לחלק השני רשמי בעמודים המתאימים.

בהצלחה רבה,
צוות האולפניאדה





החוג למתמטיקה, מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב הגמר

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



השאלון שלפנייך מורכב משני חלקים. הזמן הכולל לפתרון שני החלקים הוא ארבע שעות. מספר הנקודות הכולל שניתן לצבור הוא 130 נקודות. השימוש במחשבון מותר.

בהצלחה

חלק ראשון

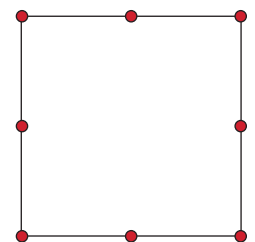
בחלק זה 10 שאלות, לכל אחת מהן מוצעות 5 תשובות שרק אחת מהן נכונה. סמני בעיגול את התשובה הנכונה. צרכה של כל שאלה הוא 7 נקודות. (סה"כ 70 נקודות)

1 סכום של ארבעה מספרים ראשוניים עוקבים הוא 272.

סכום הספרות של המספר הגדול ברביעיה זו הוא:

- א. 7 ב. 8 ג. 10 ד. 13 ה. 16

2 נתון ריבוע. נסמן באדום שמונה נקודות על שפת הריבוע: את ארבעת הקדקודים ואת ארבע נקודות האמצע של צלעות הריבוע. עתה נבחר באקראי נקודה P בתוך הריבוע. מה ההסתברות לכך שהנקודה האדומה הקרובה ביותר לנקודה P שבחרנו היא קדקוד (ולא אמצע של צלע)?



- א. $1/16$ ב. $1/8$ ג. $4/12$ ד. $1/4$ ה. $1/2$



החוג למתמטיקה, מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב הגמר

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



בתרגיל שלפניך אותיות שונות מייצגות ספרות שונות, ואותיות שוות – ספרות שוות.

4

$$\begin{array}{r} \text{ש ל ו ש ת} \\ + \quad \text{י מ י} \\ \hline \text{ה ג ב ל ה} \end{array}$$

אם **הגבלה** היא מרבית, מהו סכום ספרותיה?

- א. 17 ב. 19 ג. 21 ד. 29 ה. 35

בלוח העברי ישנם שישה סוגים של שנים: שלושה מהם שנים פשוטות ושלושה מהם שנים מעוברות. בשנה מעוברת נוסף חודש אדר א' בן 30 יום. סוגי השנים הפשוטות הם: **שנה פשוטה כסדרה** בה תשרי הוא חודש מלא בן 30 יום, מרחשוון הוא חסר בן 29 יום, כסלו הוא מלא, וכך לסירוגין, ובסך הכול בשנה פשוטה כסדרה שישה חודשים של 30 יום ושישה חודשים של 29 יום, **שנה פשוטה חסרה** שבה יום אחד פחות מבשנה פשוטה כסדרה (בחודש כסלו בשנה חסרה 29 יום), **ושנה פשוטה שלמה** שבה יום אחד יותר מבשנה פשוטה כסדרה (בחודש מרחשוון בשנה שלמה 30 יום). באופן דומה יש שלושה סוגים של שנים מעוברות: **מעוברת כסדרה**, **מעוברת חסרה ומעוברת שלמה** המכילות כל אחת חודש נוסף של 30 יום על הפשוטות המתאימות להן. לפני כאלף שנה בשנים הסמוכות: ד' אלפים תשע"ה וד' אלפים תשע"ו חל יום ראשון של ראש השנה בשבת. שנת ד' אלפים תשע"ה הייתה:

5

- א. פשוטה חסרה ב. פשוטה כסדרה ג. מעוברת חסרה ד. מעוברת כסדרה ה. מעוברת שלמה





החוג למתמטיקה, מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב הגמר

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



6 **שיבוץ** הוא מילוי של טבלה 2×2 במספרים 1,2,3,4, כל מספר בתא נפרד. הנה לדוגמה שיבוץ:

2	3
1	4

פעולה שבה מפחיתים בו-זמנית 1 משני מספרים באותה עמודה או משני מספרים באותה שורה נקראת **קיצוץ**. הנה למשל תוצאת קיצוץ של השיבוץ שבדוגמה (בקיבוץ זה הפחתנו 1 מכל אחד מהמספרים בעמודה השמאלית):

1	3
0	4

שיבוץ נקרא **מוצלח** אם אפשר להביאו על ידי סדרה של קיצוצים, לטבלה שכולה אפסים.

מספר השיבוצים המוצלחים הוא:

- א. 4 ב. 6 ג. 8 ד. 12 ה. 16

7 **שירה ותמר**, שתי מתמודדות באולפניאדה, החליפו, כל אחת בנפרד, את אותיות המילה **מתמודדת** לספרות, כך שלאותיות שוות התאימו ספרות שוות, ולאותיות שונות - ספרות שונות. שני המספרים השבעה-ספרתיים שהתקבלו, התחלקו ב- 11. המספר שקיבלה שירה הוא הגדול האפשרי בעל התכונות הנ"ל, והמספר שקיבלה תמר- הקטן האפשרי. ישנה ספרה אחת המשותפת לשני המספרים שקיבלו. מהי?

- א. 0 ב. 1 ג. 3 ד. 6 ה. 8



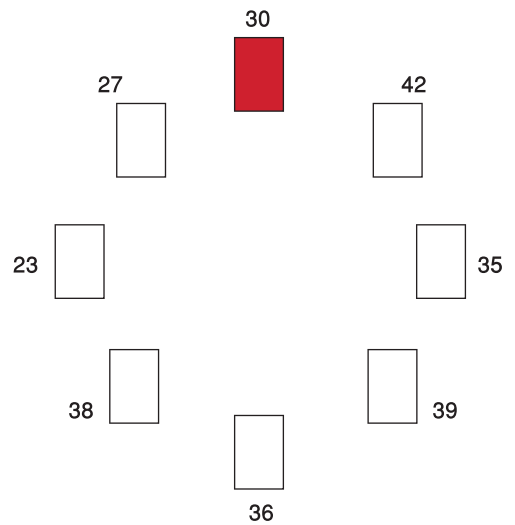
החוג למתמטיקה, מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב הגמר

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



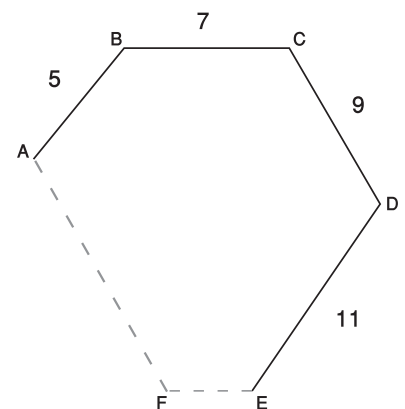
8 נתונים שמונה קלפים המסודרים במעגל. על כל קלף רשום מספר, אך הוא לא נראה מכיוון שהקלפים הפוכים. סמוך לכל קלף רשום סכום המספרים שעל חמשת הקלפים הרחוקים ממנו (כלומר, סכום מספרי כל הקלפים למעט זה שעליו ועל שני שכניו).



המספר הרשום על הקלף הצבוע באדום הוא:

- א. 10 ב. 7 ג. 6 ד. 3 ה. 1

9 במשושה שווה זוויות ABCDEF נתונים אורכיהן של ארבע מהצלעות: $AB=5$, $BC=7$, $CD=9$, $DE=11$.

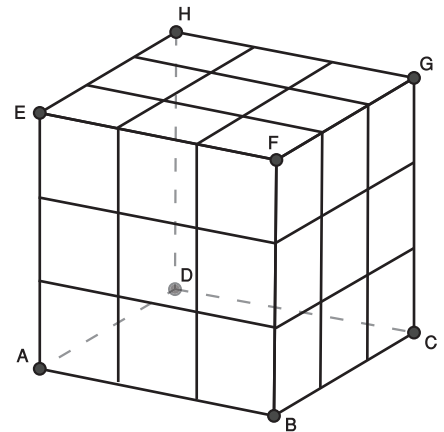


מהי מכפלת האורכים של שתי הצלעות הנותרות?

- א. 15 ב. 18 ג. 21 ד. 30 ה. אין די נתונים לחשב מכפלה זו



10 נתונה קובייה $ABCDEFGH$ המחולקת ל 27 קוביות קטנות שאורך צלען 1 כבציור. מישור העובר דרך שלושת הקדקודים B , E , G עובר דרך קדקודים נוספים של הקוביות הקטנות.



מספר הקדקודים השונים בסך הכל של הקוביות הקטנות דרכן עובר מישור זה הוא:

- א. 9 ב. 10 ג. 11 ד. 12 ה. 14



החוג למתמטיקה, מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב הגמר

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls

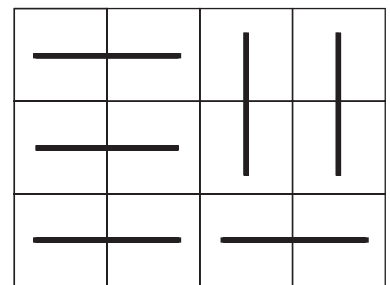
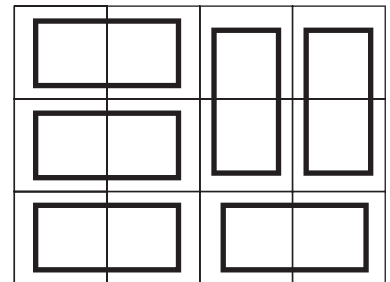


חלק שני

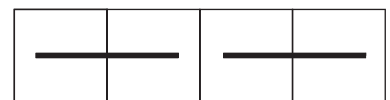
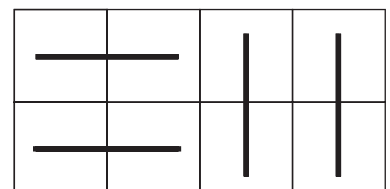
בחלק זה שתי שאלות. פתרי אותן ורשמי פתרון מנומק. במקום שדרושה הוכחה, ספקי אותה. ערכה של כל שאלה הוא 30 נקודות (בסה"כ 60 נקודות בחלק זה). תשובות חלקיות תקבלנה ניקוד חלקי.

נתון לוח משבצות מלבני, ונתונות אבני דומינו 2×1 , שכל אחת מהן מכסה בדיוק שתי משבצות סמוכות על הלוח. **כיסוי** של הלוח הוא הנחת אבני הדומינו כך שכל משבצת מכוסה על ידי אבן דומינו אחת בדיוק ואבני הדומינו אינן חורגות מהלוח. בשרטוט שלפניך מתואר כיסוי של לוח 3×4 , ומתחתיו לוח זה שבו משורטטים קטעים מתאימים המייצגים את אבני הדומינו.

11



את הלוח שבשרטוט ניתן להפריד, מבלי לחתוך את אבני הדומינו, לשני לוחות מלבניים. הפרדה כזו נקראת **פיצול**. הנה, למשל, פיצול אפשרי של הלוח שלמעלה:





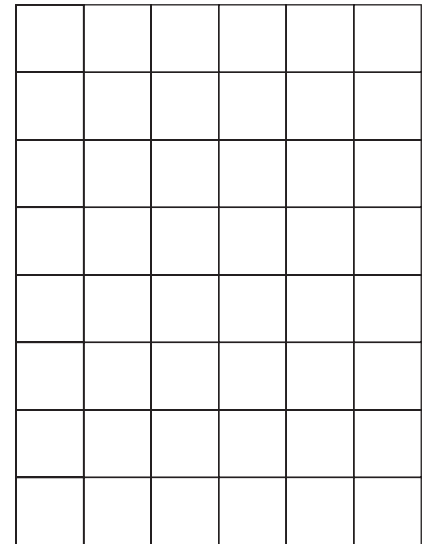
החוג למתמטיקה, מכללה ירושלים
האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב הגמר
Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



א. הוכיחי כי כל כיסוי של לוח 3×4 ניתן לפיצול לשני לוחות מלבניים.

ב. הוכיחי כי כל כיסוי של לוח 6×6 ניתן לפיצול.

ג. לפניך לוח מלבני 8×6 , ציירי כיסוי שלו שלא ניתן לפיצול.



לנחיותך מצורפים בדף הבא לוחות התנסות, ובדף שאחריו דף לכתיבת ההוכחות.



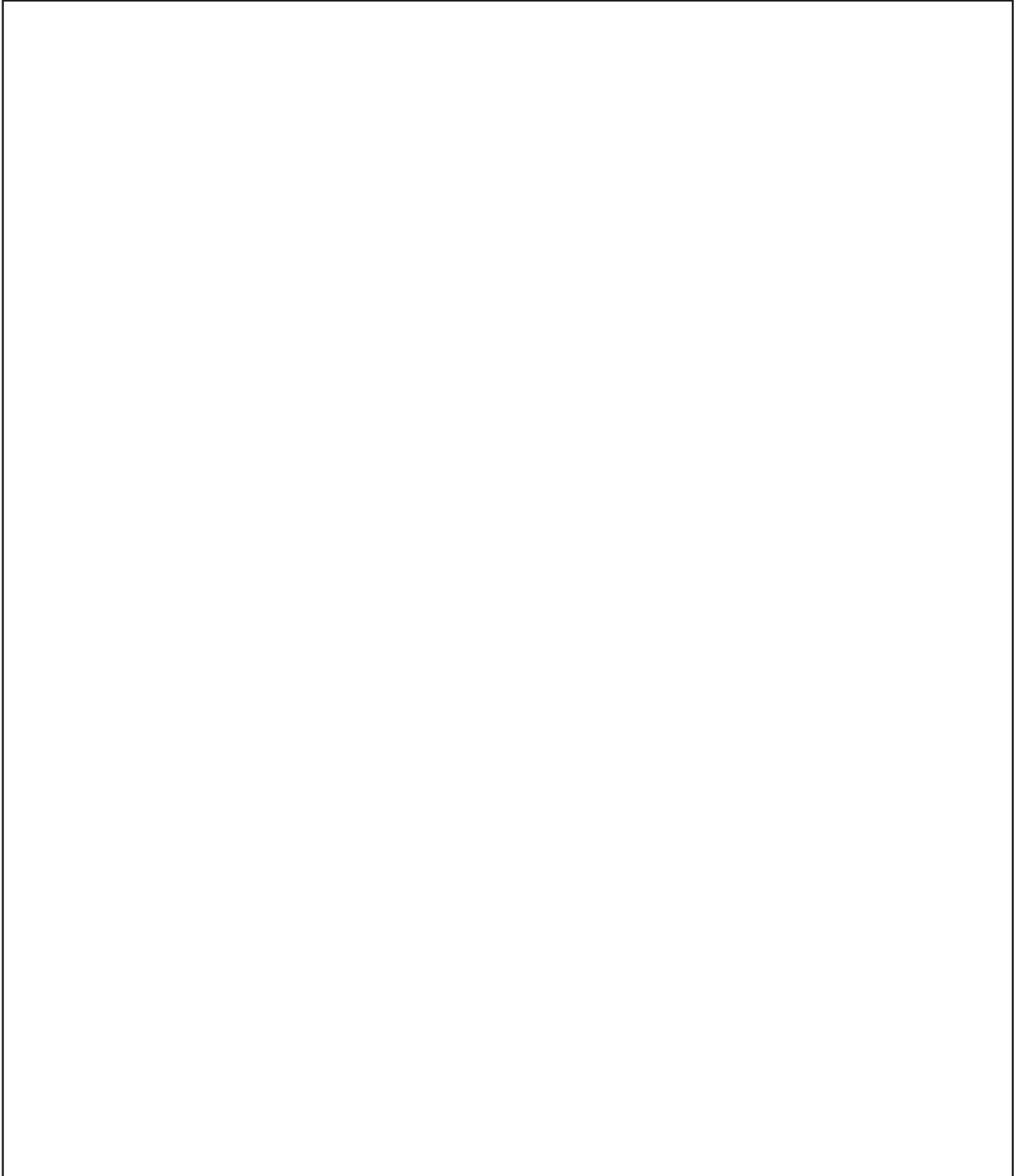


לוחות התנסות





החוג למתמטיקה, מכללה ירושלים
האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב הגמר
Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls





החוג למתמטיקה, מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב הגמר

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



נגדיר סדרה של מספרים שלמים אי-שליליים:

12

$$f(1)=0, \text{ ולכל } n \text{ טבעי } f(2n)=2f(n) ; f(2n+1)=n+2f(n)$$

א. מלאי את הטבלה:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
f(n)																										

ב. מצאי את כל המספרים הטבעיים n בעבורם $f(n)=0$. הוכיח.

ג. מהו $f(2^n+2^k)$ כאשר n ו k טבעיים ו $k < n$? הוכיח.

ד. מצאי את כל המספרים הטבעיים n בעבורם f(n) הוא מספר אי-זוגי. הוכיח.

ה. מצאי את כל המספרים הטבעיים n בעבורם $f(n+1)=f(n)$. הוכיח.

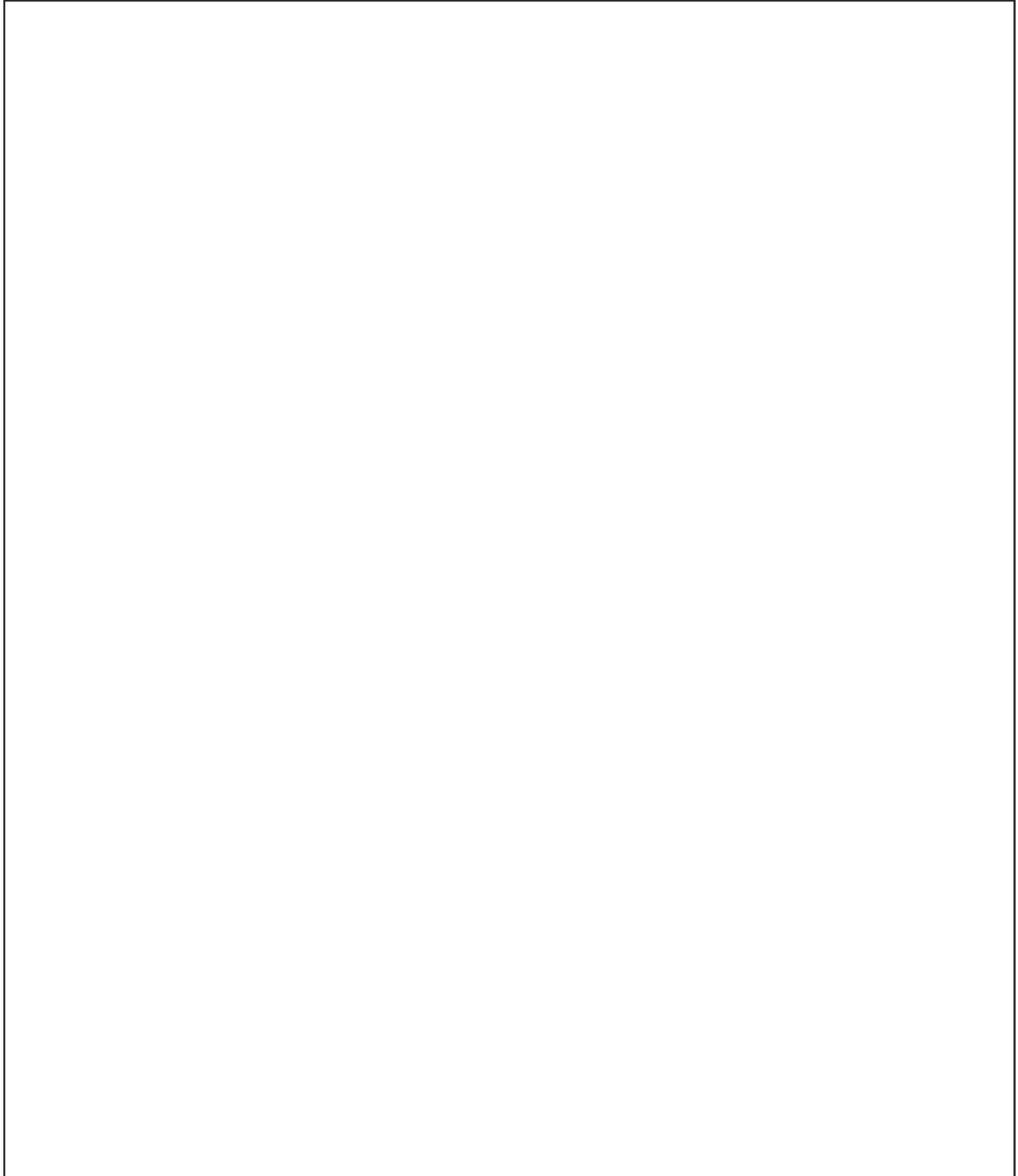
ו. מצאי את כל המספרים הטבעיים n בעבורם $f(n+1) < f(n)$. הוכיח.

בהוכחתך תוכלי להסתמך על האי-שוויון הבא: $f(n+1) \leq f(n) + n/2$ (אין צורך להוכיח את האי-שוויון)





החוג למתמטיקה, מכללה ירושלים
האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב הגמר
Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls





החוג למתמטיקה, מכללה ירושלים
האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב הגמר
Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls

