



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב הגמר
Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



כ"ג באדר ב' תשע"ד

בס"ד

משתתפת יקרה
אנו מברכים אותך על השתתפותך בשלב הגמר של האולפניאדה המתמטית, ומאחלים לך הצלחה.
בטרם תפני לשאלות, נא מלאי את הפרטים שבעמוד זה.

שם המשתתפת: _____

לתלמידת בית ספר:	לבת שרות לאומי:
_____	_____
הכיתה:	מקום השרות:
_____	_____
בית הספר:	בוגרת בית הספר:
_____	_____

הכתובת האישית: _____

מספר הטלפון: _____ מספר הטלפון הנייד: _____

כתובת דוא"ל: _____

שאלון שלב הגמר מורכב משני חלקים.

עם סיום פתרון השאלות והקפת התשובות הנכונות במעגל בחלק הראשון, נא חזרי לעמוד זה ורכזי את תשובותייך בטבלה הבאה:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	מספר שאלה
										התשובה הנכונה

את התשובות לחלק השני רשמי בעמודים המתאימים.

בהצלחה רבה,
צוות האולפניאדה





החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב הגמר

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



השאלון שלפנייך מורכב משני חלקים. הזמן הכולל לפתרון שני החלקים הוא שלוש וחצי שעות. מספר הנקודות הכולל שניתן לצבור הוא 120 נקודות. השימוש במחשבון מותר.

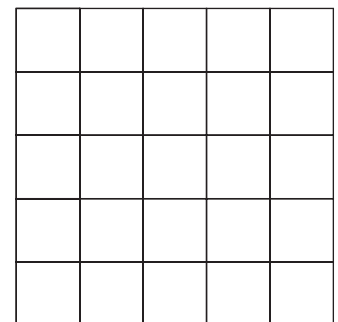
בהצלחה

חלק ראשון

בחלק זה 10 שאלות, לכל אחת מהן מוצעות 5 תשובות שרק אחת מהן נכונה. סמני בעיגול את התשובה הנכונה. צרכה של כל שאלה הוא 7 נקודות. (סה"כ 70 נקודות)

נתון לוח משבצות ריבועי 5×5 . מעבירים קו ישר החותך חלק ממשבצות הלוח.

1



מהו המספר המרבי של משבצות שהישר יכול לעבור בפנימן?

א. 5 ב. 7 ג. 9 ד. 10 ה. 13



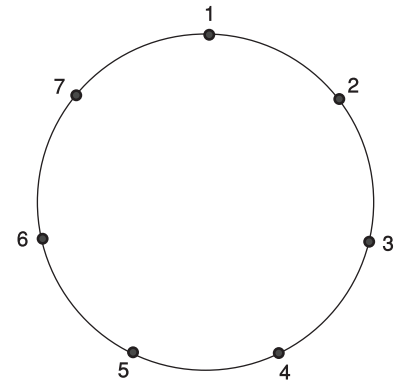
החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב הגמר

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



2 לפנייך מעגל ועליו שבע נקודות, הממוספרות מ-1 ועד 7 בכיוון השעון.



חיפושית מתמטית תזזיתית עומדת בנקודה 6, ומתחילה לנוע על המעגל בכיוון השעון לפי השארית של התחלקות המספר ב-3:

- אם החיפושית נמצאת בנקודה הנותנת שארית 1 כשמחלקים את המספר ב-3, היא תנוע לנקודה הבאה.
 - אם החיפושית נמצאת בנקודה הנותנת שארית 2 כשמחלקים את המספר ב-3, היא תנוע שתי נקודות קדימה.
 - אם היא נמצאת בנקודה שהמספר הרשום בה מתחלק ב-3, היא תנוע 3 נקודות קדימה.
- לדוגמה: בצעד הראשון מתקדמת החיפושית לנקודה 2, ובצעד השני לנקודה 4.

לאיזו נקודה תגיע החיפושית לאחר שהשלימה 5774 צעדים?

- א. 1 ב. 2 ג. 4 ד. 5 ה. 7

3 באחת השנים הגיעו לארבעת המקומות הראשונים של האולפניאדה המתמטית המתמודדות: אריאלה, ברכה, גילה ודינה. לאחר התחרות, ובטרם התפרסמו התוצאות הודלפו העובדות הבאות:

- א. אם ברכה הגיעה למקום השני או השלישי, אז אריאלה זכתה במקום הראשון.
ב. אם גילה אינה הרביעית, אז ברכה במקום השלישי.
ג. אם דינה הגיעה למקום השני, אז ברכה אינה במקום הראשון.
ד. אם דינה אינה במקום הראשון, אז ברכה במקום הראשון.

מי הגיעה למקום השלישי?

- א. אריאלה ב. ברכה ג. גילה ד. דינה ה. אין אפשרות להכריע מי הגיעה למקום השלישי.



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב הגמר

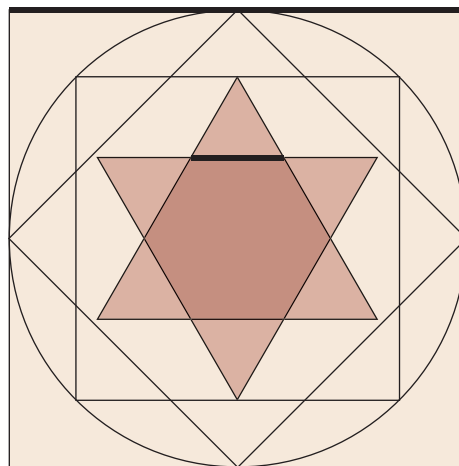
Ulpianiada - The Math Contest for Jewish Girls



4 הדף המאויר שלפניך לקוח מתוך תנ"ך לניגוד - כתב היד השלם הקדום ביותר של המקרא שנותר בשלמותו. כתב היד הועתק בקהיר על ידי שמואל בן יעקב בשנת 1008, והותאם לשיטת בן אשר. הוא שמור בספרייה הלאומית בסנקט פטרבורג. Evr. I B19a



לפניך השרטוטים הגיאומטריים המרכיבים את האיור - ריבוע חיצוני, מעגל חסום בו, שני ריבועים חופפים החסומים במעגל שחיתוכם הוא מתומן משוכלל, מגן דויד משוכלל שקדקודיו העליון והתחתון נמצאים במרכז הצלעות הנגדיות של המתומן, ומשושה משוכלל הנמצא במרכזו של המגן דויד.



היחס בין אורך צלע המשושה המשוכלל לאורך צלע הריבוע החיצוני הוא:

- א. 1:5 ב. $1:3\sqrt{3}$ ג. $1:2\sqrt{6}$ ד. $1:\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ה. $1:\frac{8}{\sqrt{2}}$



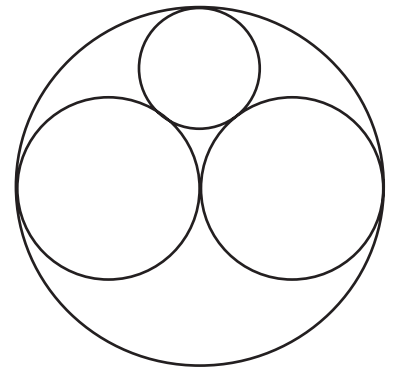
החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב הגמר

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



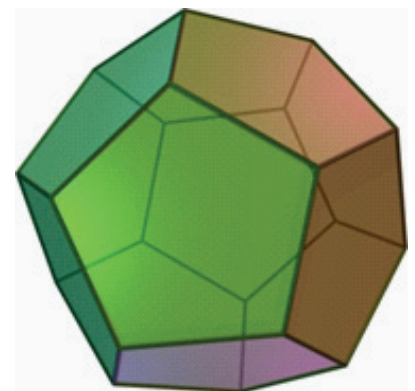
5 בציר שלפניך שלושה מעגלים המשיקים זה לזה, ומשיקים כולם למעגל נוסף המקיף אותם. הרדיוס של המעגל הגדול הוא 6 ס"מ, והרדיוסים של שני המעגלים הבינוניים הם 3 ס"מ. מהו הרדיוס של המעגל הקטן?



- א. 1.5 ס"מ ב. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ס"מ ג. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ס"מ ד. 2 ס"מ ה. 2.25 ס"מ

6 **דודקהדרון** הוא פאון משוכלל שכל דפנותיו הן מחומשים משוכללים, ובכל אחד מקדקודיו נפגשים שלושה מחומשים (כמתואר בציור).

אלכסון פנימי של הדודקהדרון הוא קטע המחבר שניים מקדקודיו, ואיננו מוכל באחת מדפנותיו (כלומר, אלכסון המכיל נקודות פנימיות של הדודקהדרון).



מספר האלכסונים הפנימיים של הדודקהדרון הוא:

- א. 90 ב. 100 ג. 110 ד. 115 ה. 120



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב הגמר

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



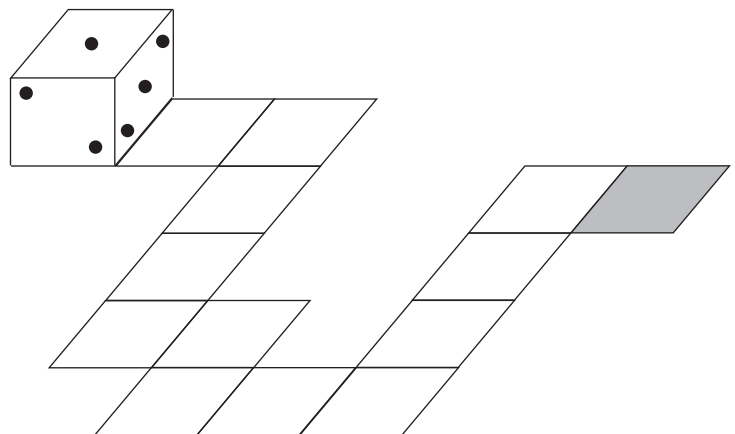
7 בתרגיל הכפל שלפניך כל ספרה ראשונית מיוצגת על ידי האות ר, כל ספרה זוגית שאינה ראשונית מיוצגת על ידי האות ז, וכל ספרה אי-זוגית שאינה ראשונית מיוצגת על ידי א (ספרות שונות עשויות להיות מיוצגות על ידי אותה אות).

$$\begin{array}{r}
 \text{ר ר ר} \\
 \times \text{ר ר} \\
 \hline
 \text{ר ז ר} \\
 \text{ר ז ז א} \\
 \hline
 \text{ר א ר א}
 \end{array}$$

סכום הספרות אשר אינן מופיעות בתרגיל הוא:

- א. 17 ב. 16 ג. 15 ד. 14 ה. 13

8 על הדפנות של קוביית משחק כתובים המספרים 1-6, כך שסכום המספרים הכתובים על דפנות נגדיות הוא 7. בקובייה שלפניך המספר 1 מופיע על הדופן העליונה. מגלגלים את הקובייה על צידיה, כמתואר במסלול הבא:



כשהקובייה מגיעה לריבוע הסיום (הריבוע המסומן באפור), מהו המספר המופיע על הדופן העליונה שלה?

- א. 6 ב. 5 ג. 4 ד. 3 ה. 2





החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב הגמר

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



9 באחת האולפניאדות התקיים מבחן שלב הגמר בשני חדרים סמוכים. התברר שאם היו בוחרים באקראי שתי מתמודדות שעלו לגמר, ההסתברות שהן נבחנו בשני חדרים שונים הייתה בדיוק $1/2$. אחד מהמספרים הבאים הוא מספר הבנות שהשתתפו בשלב הגמר באותה שנה. מהו?

א. 61 ב. 62 ג. 63 ד. 64 ה. 65

10 פלינדרום הוא מספר שאם הופכים את סדר ספרותיו, מתקבל מספר זהה. המספרים 343 ו-878 הם זוג פלינדרומים תלת-ספרתיים שגם סכומם - 1221 הוא פלינדרום ארבע ספרתי. מהו מספר הזוגות של פלינדרומים תלת-ספרתיים, שסכומם הוא פלינדרום ארבע ספרתי?

א. 30 ב. 32 ג. 36 ד. 64 ה. 72



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב הגמר

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



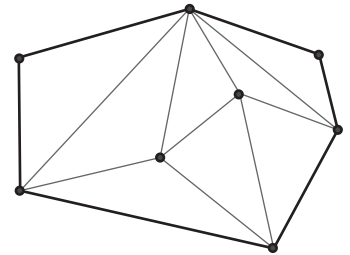
חלק שני

בחלק זה שתי שאלות. פתרי אותן ורשמי פתרון מנומק. במקום שדרושה הוכחה, ספקי אותה. ערכה של כל שאלה הוא 25 נקודות (בסה"כ 50 נקודות בחלק זה). תשובות חלקיות תקבלנה ניקוד חלקי.

11 כחול ולבן

א. נתון מצולע קמור (מצולע קמור הוא מצולע שכל זוויותיו הפנימיות קטנות מ- 180°). **שילוש של המצולע** הוא חלוקה של המצולע למשולשים על ידי העברת אלכסונים או הוספת קדקודים וצלעות בפנים המצולע. בשילוש, כל שתי צלעות הן או זרות או נחתכות בקדקוד.

דוגמה:



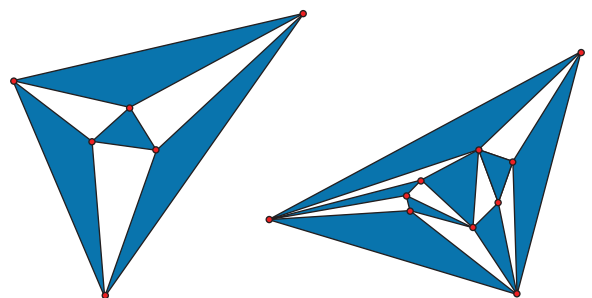
שילוש דו-צבעי של מצולע הוא צביעה של משולשי השילוש, המקיימת את התנאים הבאים:

א. כל משולש שבחלוקה נצבע באחד משני צבעים (כחול או לבן).

ב. כל שני משולשים החולקים צלע, נצבעים בצבעים שונים.

ג. כל משולש החולק צלע עם המצולע המקורי, נצבע בכחול.

לפניך שתי דוגמאות של שילוש דו-צבעי של משולש:





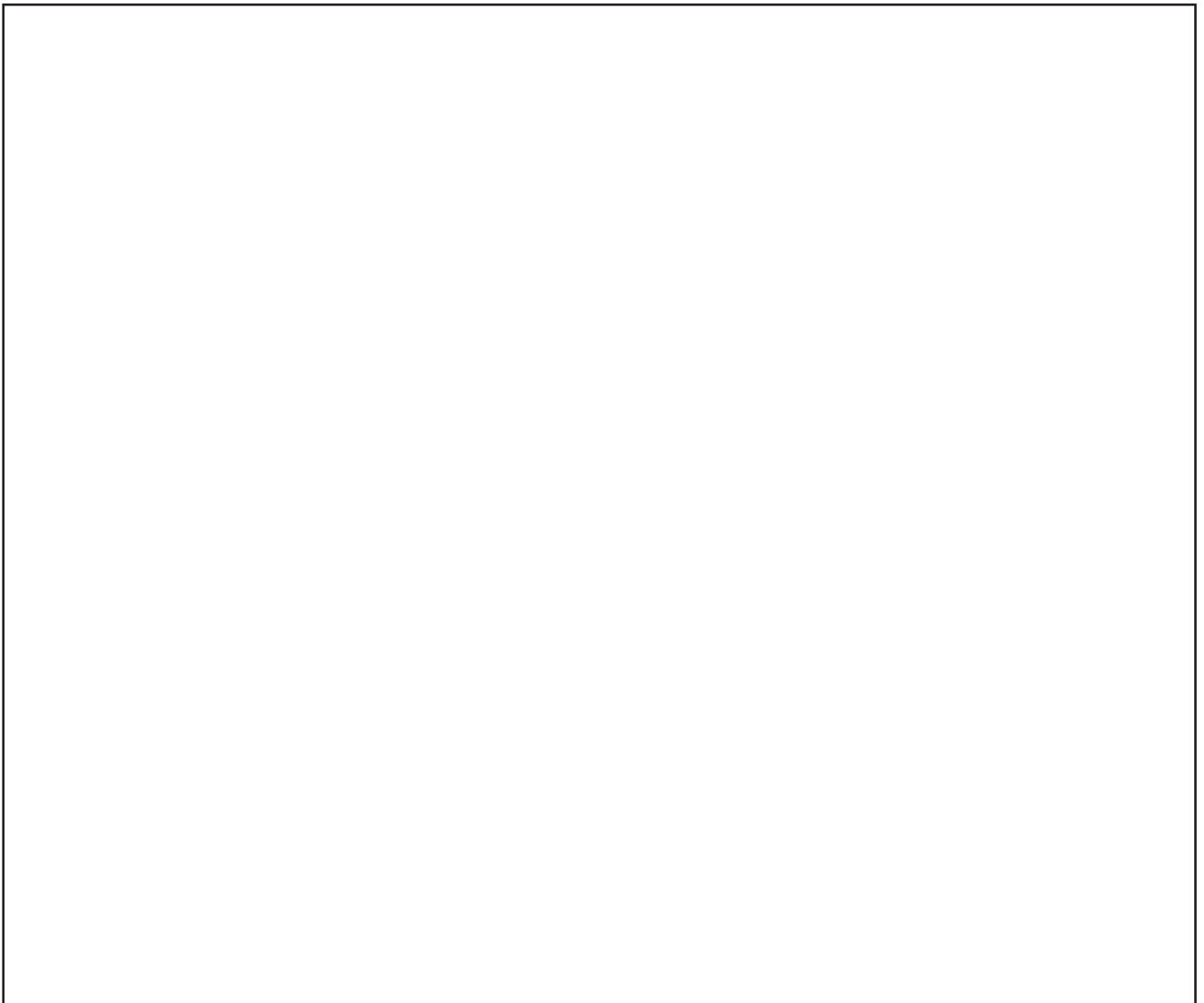
החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב הגמר

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



1. נתון כי מספר המשולשים הלבנים בשילוש דו-צבעי של משולש הוא n . מהו מספר המשולשים הכחולים? מהו מספר הצלעות בשילוש (כולל הצלעות של המשולש המקורי)? הוכיחי את טענותייך.
2. בני שילוש דו-צבעי של משושה קמור.
3. הוכיחי כי אם יש למצולע קמור בעל m קדקודים שילוש דו-צבעי, אז m מתחלק ב-3.
4. הוכיחי: לכל מצולע קמור שמספר קדקודיו הוא $3k$ (k שלם), יש שילוש דו-צבעי.

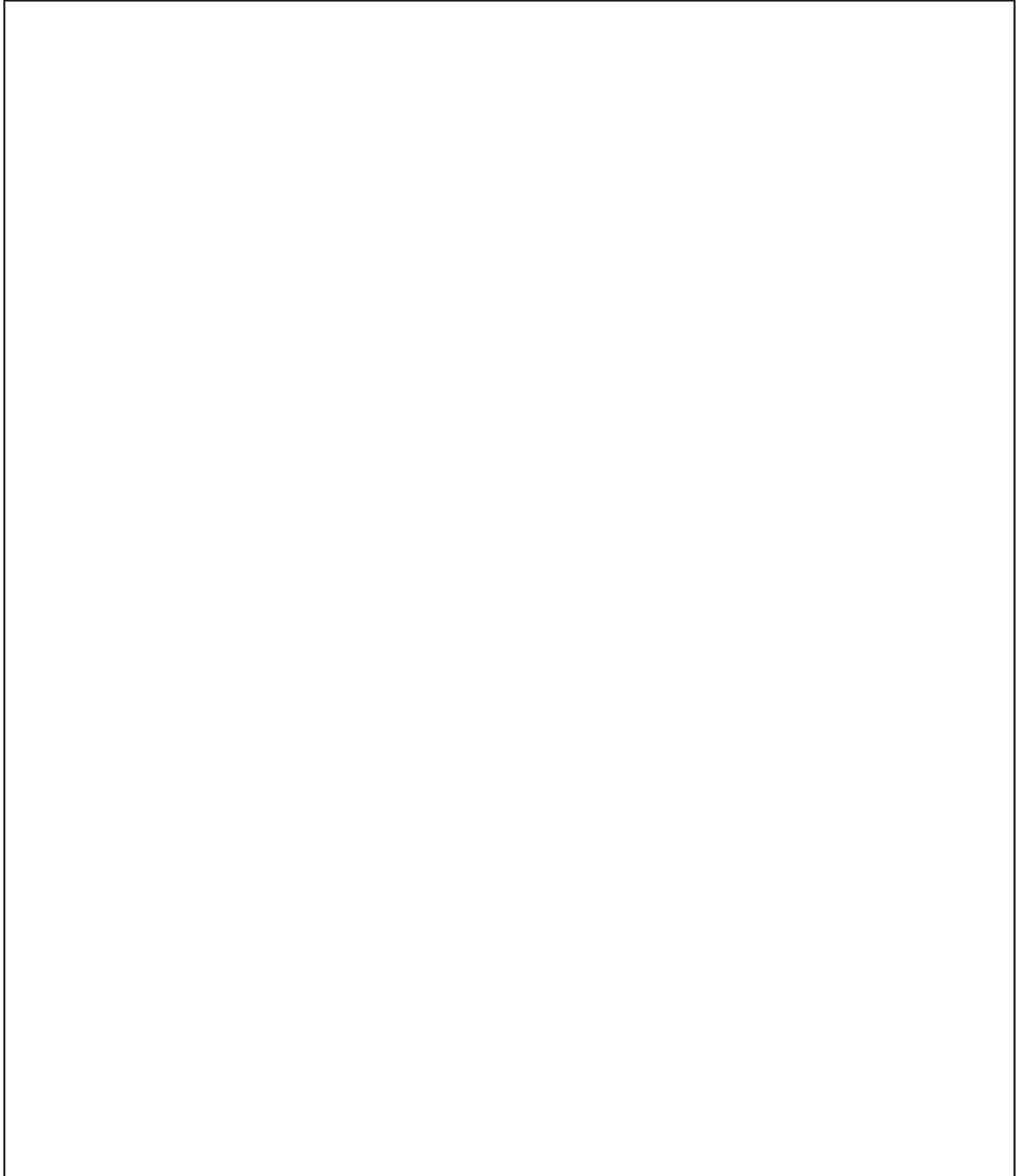




החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב הגמר

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls





החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב הגמר
Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls

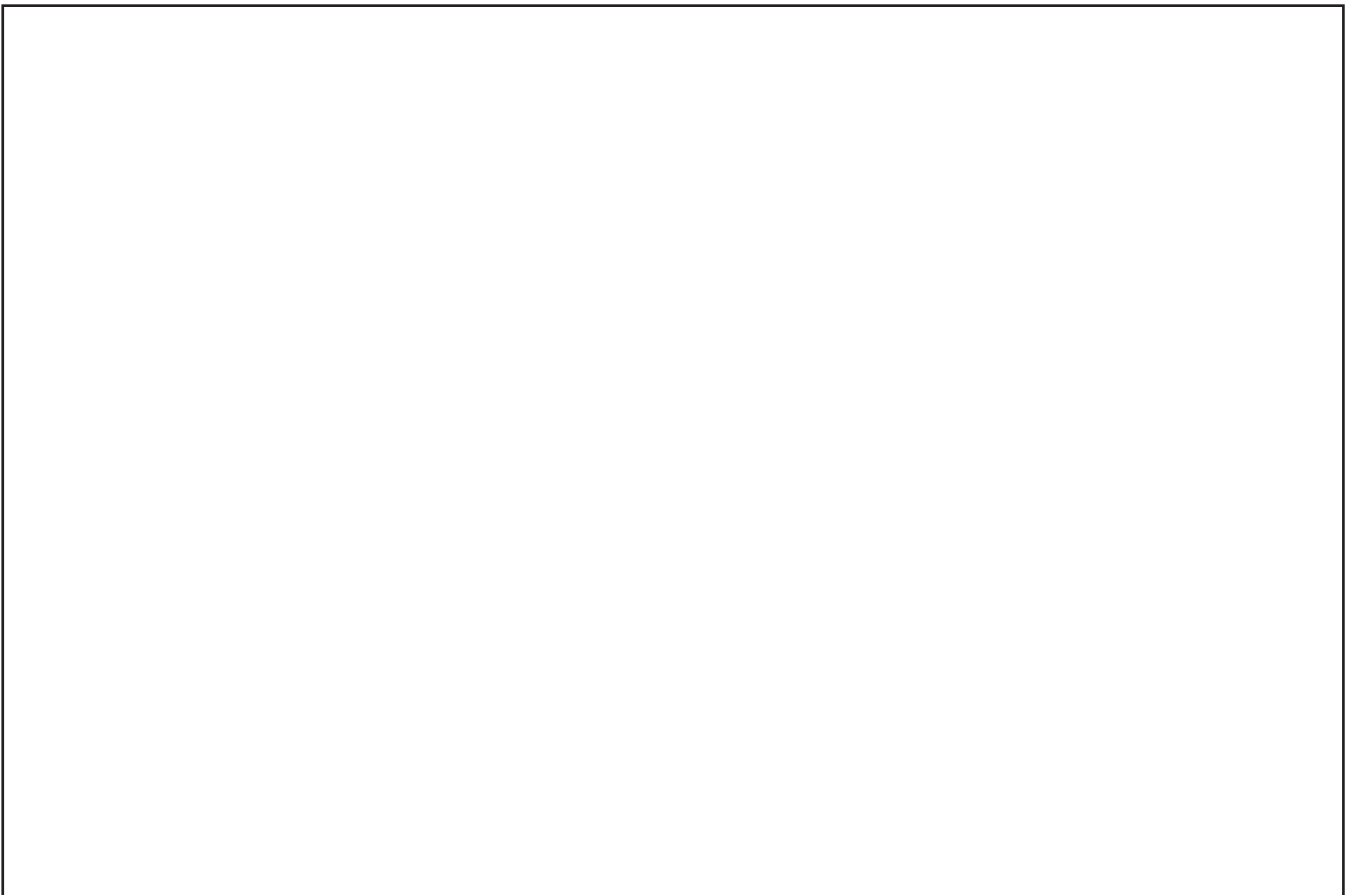


שאלת ה-50 12

לכבוד יובל החמישים למכללה ירושלים

1. הוכיחי כי לכל בחירה של 50 מספרים שלמים שונים בין 1 ל-99, קיימים שניים מתוכם הזרים זה לזה (שני מספרים שלמים הם זרים, אם אין להם גורם משותף גדול מ-1).
2. תני דוגמה ל-50 מספרים שלמים שונים בין 1 ל-100, כך שלכל שניים מתוכם יש גורם משותף גדול מ-1. הראי כי זו הדוגמה היחידה הקיימת.

3. הוכיחי כי בכל בחירה של 50 מספרים שלמים שונים בין 1 ל-98, קיימים שניים מתוכם כך שהאחד מחלק את האחר.
4. האם בכל בחירה של 50 מספרים שלמים שונים בין 1 ל-99, יש בהכרח שני מספרים, שאחד מהם מחלק את האחר? אם כן - הוכיחי, אם לא - תני דוגמה נגדית מפורשת.





החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב הגמר

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls

