



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים  
האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ב - השלב השני

Ulpaniada 5772 - The Math Contest for Jewish Girls



כ' אדר תשע"ב

בס"ד

### משתתפת יקרה

אנו מברכים אותך על עלייתך לשלב השני של האולפניאדה המתמטית, ומאחלים לך הצלחה בהמשך התחרות. בטרם תפני לשאלות, מלאי את הפרטים שבעמוד זה.

שם המשתתפת: \_\_\_\_\_

לתלמידת בית ספר:	לבת שרות לאומי:
_____	_____
הכיתה:	מקום השרות:
_____	_____
בית הספר:	בוגרת בית הספר:
_____	_____

הכתובת האישית: \_\_\_\_\_

מספר הטלפון: \_\_\_\_\_ מספר הטלפון הנייד: \_\_\_\_\_

כתובת דוא"ל: \_\_\_\_\_

### שאלון השלב השני מורכב משני חלקים.

עם סיום פתרון השאלות והקפת התשובות הנכונות במעגל בחלק הראשון, נא חזרי לעמוד זה ורכזי את תשובותייך בטבלה הבאה:

מספר שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
התשובה הנכונה														

את התשובות לחלק השני רשמי בעמודים המתאימים.

**בהצלחה רבה.**  
**צוות האולפניאדה**

**מזכירות האולפניאדה – החוג למתמטיקה, מכללה ירושלים**

ת.ד. 16078 בית וגן ירושלים 91160 Jerusalem Bayit Vagan P.O.B. 16078

טל: (02) 6750705 פקס: (02) 6750950

http://ulpaniada.macam.ac.il ulpaniada@macam.ac.il



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים  
השלב השני

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ב - השלב השני

Ulpianiada 5772 - The Math Contest for Jewish Girls



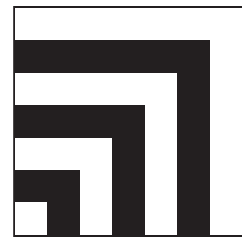
השאלון שלפניך מורכב משני חלקים.  
בחלק הראשון 14 שאלות, לכל אחת מהן מוצעות 5 תשובות שרק אחת מהן נכונה.  
קראי בעיון את השאלות, פתרי אותן, וסמני בעיגול את התשובה הנכונה.  
בחלק השני שתי שאלות. פתרי אותן ורשמי פתרון מנומק. גם תשובות חלקיות תתקבלנה.

הזמן הכולל לפתרון שני החלקים הוא שלוש שעות.  
השימוש במחשבון מותר.

**בהצלחה**

## חלק ראשון

1 חילקו שתיים מצלעות הריבוע שלפניך לשבעה קטעים שווים, ויצרו את הציור הבא:



מה היחס בין השטח הצבוע בשחור לבין שטח הריבוע החיצוני?

- א.  $\frac{1}{2}$     ב.  $\frac{1}{3}$     ג.  $\frac{20}{49}$     ד.  $\frac{15}{36}$     ה.  $\frac{3}{7}$

2 בדיוק אחד מהמשפטים הבאים הוא משפט אמיתי.

- א. זה המשפט האמיתי.  
ב. ה הוא המשפט האמיתי.  
ג. אף אחד מהקודמים אינו משפט אמיתי.  
ד. ג הוא משפט שקרי.  
ה. א הוא המשפט האמיתי.

מהו המשפט האמיתי?

- א. א    ב. ב    ג. ג    ד. ד    ה. ה



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ב - השלב השני

Ulpianiada 5772 - The Math Contest for Jewish Girls



3 הממוצע של שלושה מספרים טבעיים  $k, m, n$  הוא  $70$ . מהו הערך המרבי של המנה  $n/k$ ?

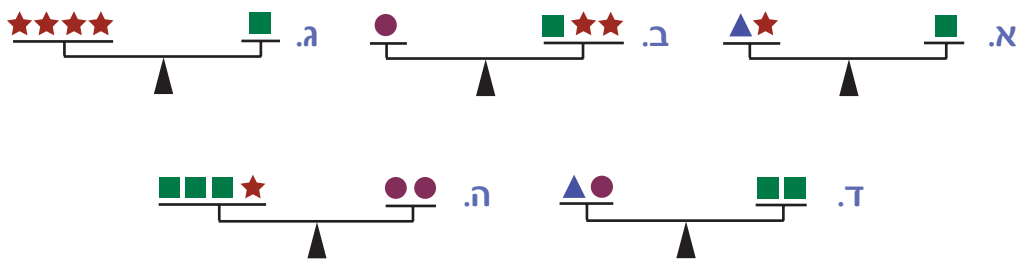
- א. 8      ב. 8.25      ג. 8.75      ד. 9      ה. 9.9

4 לכל אחת מארבע הצורות: ריבוע, משולש, כוכב ועיגול יש משקל חיובי.

אם שלושת המאזניים שלפניך מאוזנים:

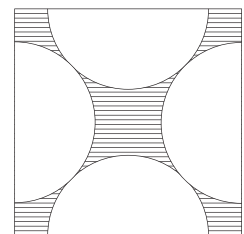


מי מהמאזניים הבאים גם הם מאוזנים?



5 לכבוד יום הפאי ( $\pi$ ) הבינלאומי (שחל ב-14 במרץ - 3.14) הכינו שתי עוגות עגולות זהות, חצו כל אחת מהן לשתיים, והגישו

אותן מונחות באופן סימטרי על מגש ריבועי שצלעו 1, כמתואר בציר:



שטחו של האזור המקווקו (חלקו הבלתי מכוסה של המגש) הוא:

- א.  $1 - \frac{\pi}{8}$       ב.  $\frac{\pi}{4}$       ג.  $4 - \pi$       ד.  $1 - \frac{\pi}{4}$       ה.  $\sqrt{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

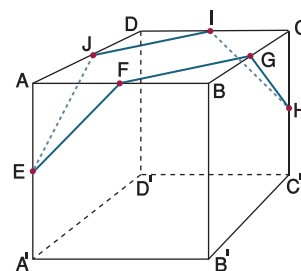


החוג למתמטיקה מכללה ירושלים  
האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ב - השלב השני

Ulpaniada 5772 - The Math Contest for Jewish Girls



6 נתונה קובייה  $ABCD A'B'C'D'$ . הנקודות  $E, F, G, H, I, J$  הן אמצעי הצלעות  $AA', AB, BC, CC', CD, AD$  בהתאמה. נמלה דייקנית טיילה על פני הקובייה במסלול סגור של קטעים  $E-F-G-H-I-J-E$ . אורך המסלול הסגור הוא 12 ס"מ.



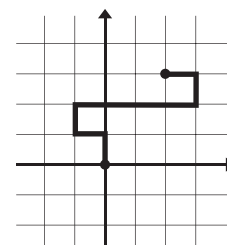
נפח הקובייה בסמ"ק הוא:

- א. 16      ב.  $8\sqrt{2}$       ג. 22.14      ד.  $16\sqrt{2}$       ה. 24

7 חודש ניסן הוא תמיד חודש מלא (30 יום). בשנה מסוימת בחודש ניסן היה מספר שווה של ימי ראשון וחמישי. באיזה יום בשבוע חל ראש חודש ניסן באותה שנה?

- א. ראשון      ב. שלישי      ג. רביעי      ד. חמישי      ה. שבת

8 לפניך דף משוּבָּץ ובו מערכת צירים. מתבוננים בכל המסלולים המחברים את הנקודה  $(0,0)$  עם הנקודה  $(2,3)$ , המסלולים עוברים על צלעות המשבצות, ואורכם קטן מ-10. לפניך דוגמה למסלול אפשרי.



כמה נקודות שריג (כולל שתי נקודות הקצה הנ"ל) נמצאות לפחות באחד המסלולים האלו? (נקודות שריג הן נקודות במישור, ששני השיעורים שלהם הם מספרים שלמים).

- א. 12      ב. 24      ג. 28      ד. 40      ה. 44



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים  
השלב השני

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ב - השלב השני

Ulpianiada 5772 - The Math Contest for Jewish Girls



9 נתונה סדרה של מספרים, כך שלכל  $n$ , הממוצע של  $n$  האיברים הראשונים של הסדרה הוא  $n$ .  
מהו האיבר ה-5772 של הסדרה?

א. 5771    ב. 5772    ג. 5773    ד. 11543    ה. 11544

10 כמה שלשות סדורות של מספרים ממשיים  $(a,b,c)$  הן פתרון של מערכת המשוואות:

$$ab=c \quad bc=a \quad ac=b$$

א. 2    ב. 3    ג. 4    ד. 5    ה. 6

11 נתונים שני מספרים טבעיים שונים. לכל אחד מהם יש שמונה מחלקים (חיוביים). סכום שני המספרים קטן מ-60.  
מהי מכפלתם?

א. 640    ב. 720    ג. 864    ד. 972    ה. 1260

12 מספר ייקרא רב-ראשוני אם הוא ראשוני, כל ספרותיו ראשוניות, וכל רצף חלקי לפי הסדר של ספרותיו, גם הוא מספר ראשוני. (1 אינו מספר ראשוני).

לדוגמה: 23 הוא מספר רב-ראשוני, ואילו 233 אינו רב-ראשוני (כי הרצף 33 אינו ראשוני).  
סכום ספרותיו של המספר הרב-ראשוני המרבי הוא:

א. 13    ב. 15    ג. 17    ד. 23    ה. 30

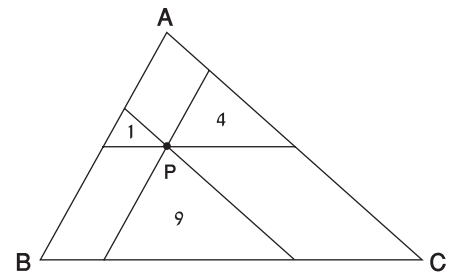


החוג למתמטיקה מכללה ירושלים  
האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ב - השלב השני

Ulpianiada 5772 - The Math Contest for Jewish Girls



13 P היא נקודה בתוך משולש ABC. דרך הנקודה P מעבירים מקבילים לשלוש צלעות המשולש, המחלקים אותו לשישה תחומים, ששלושה מהם משולשים, כמתואר בציור.



אם שטחי המשולשים הם 1, 4 ו-9, אז שטח המשולש ABC הוא:

- א. 25      ב. 26      ג. 30      ד. 36      ה. 40

14 רחל עמדה בתחנה, והמתונה ליעל חברתה. במהלך ההמתנה עברו עשרה אוטובוסים שהראשון שבהם הוא קו מספר 1, והשביעי - קו מספר 9. רחל הבחינה כי מספרו של כל אוטובוס שעבר הוא מספר ריבועי, וכי סכומי מספריהם של כל ארבעה אוטובוסים רצופים שעברו בתחנה הינם שווים. כמו כן שמה לב, כי סכום מספרי הקווים של עשרת האוטובוסים הוא 195. בדיוק אז הגיעה יעל, ושתיהן עלו על האוטובוס העשירי. מה מספרו?

- א. 1      ב. 4      ג. 9      ד. 16      ה. 49



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים  
השלב השני

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ב - השלב השני

Ulpniada 5772 - The Math Contest for Jewish Girls

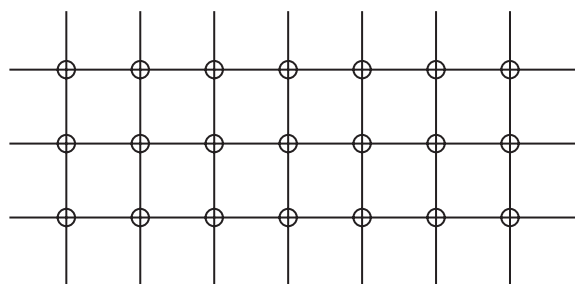


## חלק שני

בחלק זה שתי שאלות. פתרי אותן, ורשמי פתרון מנומק. במקום שדרושה הוכחה, ספקי אותה. גם תשובות חלקיות תתקבלנה. את תשובותיך מלאי בהמשך הדף בו מופיעה השאלה. אם המקום אינו מספיק, המשיכי בציודו השני של הדף.

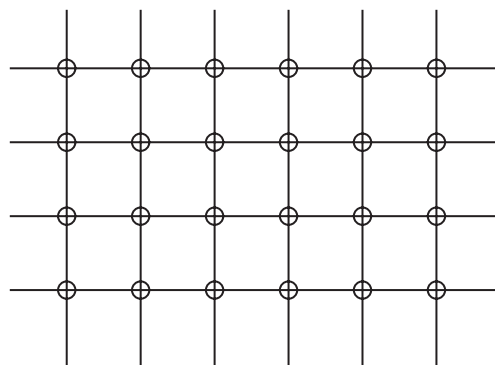
15 א. בציור שלפניך שריג  $3 \times 7$ .

(נקודות שריג הן נקודות במישור, ששני השיעורים שלהן הם מספרים שלמים. קווי השריג מקבילים לצירים.)



צובעים כל אחת מ-21 נקודות השריג באחד משני צבעים: כחול או אדום. הוכיחי כי בכל צביעה כזו קיים מלבן הנוצר על ידי ארבעה מקווי השריג, כך שכל קדקודיו צבועים באותו צבע.

ב. בציור שלפניך שריג  $4 \times 6$ . גם את נקודות השריג זה צובעים בשני צבעים, כחול או אדום. האם בכל צביעה כזו מובטח מלבן שכל קדקודיו שווים צבע? אם התשובה חיובית, ספקי הוכחה. אם התשובה שלילית, תני דוגמה לצביעה מתאימה של 24 נקודות השריג, שבה אין מלבן שכל קדקודיו צבועים באותו צבע.





החוג למתמטיקה מכללה ירושלים  
האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ב - השלב השני

Ulpaniada 5772 - The Math Contest for Jewish Girls



<p>A large rectangular area with a dotted grid pattern, intended for writing answers.</p>
---





החוג למתמטיקה מכללה ירושלים  
השלב השני

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ב - השלב השני

Ulpianiada 5772 - The Math Contest for Jewish Girls



- 16 תהי  $(a,b,c)$  שלשה של מספרים טבעיים המקיימת  $a \leq b \leq c$ . ידוע שאם  $a+b > c$  אז קיים משולש יחיד שאורכי צלעותיו הם  $(a,b,c)$ , ואם  $a+b \leq c$  אין משולש כזה (אין צורך להוכיח טענות אלו).
- לכל מספר טבעי  $n \geq 3$  נסמן ב-  $T(n)$  את קבוצת כל השלושות  $(a,b,c)$  של מספרים טבעיים  $a \leq b \leq c$  שהן אורכי הצלעות של משולש שהיקפו  $n$ .
- לדוגמה: הקבוצה  $T(5)$  מכילה את השלשה  $(1,2,2)$  ואותה בלבד (אין משולש שאורכי צלעותיו הם  $(1,1,3)$ ).
- א. מהי הקבוצה  $T(4)$ ?
- ב. מצאי את כל השלושות אשר ב-  $T(8), T(9)$  ו-  $T(12)$ .
- ג. הראי כי לכל  $n$  אי-זוגי יש ב-  $T(n)$  שלשה יחידה שבה  $a=1$ , ולכל  $n$  זוגי אין ב-  $T(n)$  אף שלשה כזו.
- ד. הוכיחי כי לכל  $n$  אי-זוגי יש ב-  $T(n)$  וב-  $T(n+3)$  בדיוק אותו מספר שלשות.
- ה. הוכיחי כי מספר השלושות ב-  $T(n+2)$  גדול או שווה למספר השלושות ב-  $T(n)$ .
- ו. מצאי את כל ערכי  $n$  שבעבורם הקבוצה  $T(n)$  מכילה שלשה יחידה. הסבירי מדוע אין ערכי  $n$  נוספים שבעבורם הקבוצה  $T(n)$  מכילה שלשה יחידה.



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים  
השלב השני

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ב - השלב השני

Ulpniada 5772 - The Math Contest for Jewish Girls

