



# האולפניאדה המתמטית תש"ע - השלב השני

החוג למתמטיקה מכללה ירושלים



כ"ד באדר תש"ע

בס"ד

משתתפת יקרה

אנו מברכים אותך על עלייתך לשלב השני של האולפניאדה המתמטית, ומאחלים לך הצלחה בהמשך התחרות. בטרם תפני לשאלות, מלאי את הפרטים שבעמוד זה.

שם המשתתפת: \_\_\_\_\_

הכיתה: \_\_\_\_\_ בית הספר: \_\_\_\_\_

הכתובת האישית: \_\_\_\_\_

מספר הטלפון: \_\_\_\_\_ מספר הטלפון הנייד: \_\_\_\_\_

כתובת דוא"ל: \_\_\_\_\_

שאלון השלב השני מורכב משני חלקים.

עם סיום פתרון השאלות והקפת התשובות הנכונות בעיגול בחלק הראשון, נא חזרי לעמוד זה ורכזי את תשובותיך בטבלה הבאה:

מספר שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
התשובה הנכונה														

את התשובות לחלק השני רשמי בעמודים המתאימים.

בהצלחה רבה.

צוות האולפניאדה

החוג למתמטיקה, מכללה ירושלים

**מזכירות האולפניאדה – החוג למתמטיקה, מכללה ירושלים**

ת.ד. 16078 בית וגן ירושלים 91160 16078 P.O.B. Jerusalem Bayit Vagan

טל: (+9722) 6750705 פקס: (+9722) 6750950 (+9722) 6750950

ulpaniada.macam.ac.il ulpaniada@macam.ac.il



השאלון שלפניך מורכב משני חלקים.

בחלק הראשון 14 שאלות, לכל אחת מהן מוצעות 5 תשובות שרק אחת מהן נכונה.

קראי בעיון את השאלות, פתרי אותן, וסמני בעיגול את התשובה הנכונה.

בחלק השני 3 שאלות. פתרי אותן ורשמי פתרון מנומק. גם תשובות חלקיות תקבלנה.

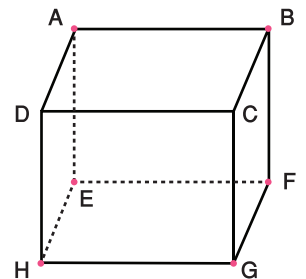
הזמן הכולל לפתרון שני החלקים הוא שלוש וחצי שעות.

השימוש במחשבון מותר.

בהצלחה

## חלק ראשון

1. A ו-G הם קדקודים נגדיים בקובייה. כדי להגיע מ-A ל-G בדרך קצרה ביותר העוברת לאורך צלעות, יש צורך בשלושה צעדים. בכמה דרכים שונות ניתן לעשות זאת?



- א. 3      ב. 4      ג. 5      ד. 6      ה. 8

2. בתרגיל החיבור שלפניך, הספרות הוחלפו באותיות. אותיות שונות מייצגות ספרות שונות, ואותיות שוות – ספרות שוות.

$$\begin{array}{r} \text{אול} \\ + \text{פני} \\ \hline \text{אדה} \end{array}$$

מהו הערך המזערי האפשרי של התוצאה **אדה**?

- א. 201      ב. 321      ג. 102      ד. 396      ה. 431



# האולפניאדה המתמטית תש"ע - השלב השני

החוג למתמטיקה מכללה ירושלים



3

חמשת הנכדים אבי, ברוך, גבריאל, דניאל והרשי ישבו סביב שולחן הסדר. אחד מהם גנב את האפיקומן. לפנייתו של סבא, ענה כל אחד מהילדים משפט אחד:

אבי: דניאל הוא שגנב את האפיקומן.

ברוך: ידי לא הייתה במעל...

גבריאל: הרשי לא גנב את האפיקומן!

דניאל: אבי לא דובר אמת.

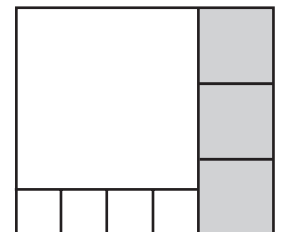
הרשי: ברוך צודק!

יעל, שהייתה עדה לכל המתרחש, אמרה לסב ששלושה מהילדים דברו אמת, והשניים האחרים שיקרו. מי גנב את האפיקומן?

א. אבי    ב. ברוך    ג. גבריאל    ד. דניאל    ה. הרשי

4

בתוך המלבן שלפניך יש 8 ריבועים פנימיים. אם השטח האפור שווה ל-300, אז שטח הריבוע הפנימי הגדול הוא:



א. 400    ב. 441    ג. 484    ד. 676    ה. 576

5

במשולש ABC אורכי שלוש הצלעות הם מספרים שלמים. אם  $AB=7$  ואם  $AC=4BC$  אז היקפו של המשולש הוא:

א. 12    ב. 15    ג. 16    ד. 17    ה. 22

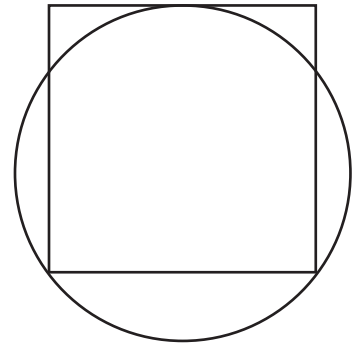


# האולפניאדה המתמטית תש"ע - השלב השני

## החוג למתמטיקה מכללה ירושלים



6 בציר שלפניך נתון מעגל שרדיוסו 10, וריבוע שאחת מצלעותיו משיקה למעגל, והצלע שמולה היא מיתר במעגל.



גודל צלע הריבוע הוא:

- א. 10      ב. 12      ג.  $4\pi$       ד. 16      ה.  $5\pi$

7 כמה מספרים טבעיים גדולים פי 7 מסכום ספרותיהם?

- א. 1      ב. 2      ג. 3      ד. 4      ה. 5

8 מצולע נקרא קמור, אם כל זוויותיו הפנימיות קטנות מ- $180^\circ$ .  
בעבור כמה ערכים של  $n$  קיים מצולע קמור בעל  $n$  קדקודים, כך שהיחסים בין הזוויות שלו הם  $n: \dots: 3:2:1$ ?

- א. 1      ב. 2      ג. 3      ד. 4      ה. אין מצולע כזה

9 שני מספרים ארבע-ספרתיים שונים מכילים כל אחד את הספרות 2, 4, 5 ו-7.

אם אחד מהם הוא כפולה שלמה של האחר, אז סכומם הוא:

- א. 7227      ב. 9900      ג. 11039      ד. 11817      ה. 13284

10 A היא קבוצה של 20 מספרים טבעיים עוקבים.

אם 8 אינו איבר ב-A, אז המספר המרבי של מספרים ראשוניים שיכולים להיות ב-A הוא:

- א. 4      ב. 5      ג. 6      ד. 7      ה. 8



11 ברשת "נחמה" חמש אולפנות א, ב, ג, ד, ה, הנמצאות במקומות שונים. המרחקים בק"מ בין האולפנות נתונים באופן חלקי בטבלה הבאה:

	א	ב	ג	ד	ה
א		50	40	55	
ב			30		66
ג				15	36

המרחק בק"מ בין אולפנה ד לאולפנה ה הוא:

- א. 39      ב. 42      ג. 45      ד. 47      ה. 51

12 באגף שמאל של הזהות החיבורית הבאה:  $1+2+3+4+5+6+7+8+9=117$  משתתפות כל תשע הספרות לפי הסדר. מלבד סכום זה, כמה סכומים נוספים המכילים את כל תשע הספרות לפי סדרן, שווים ל-117?

- א. 1      ב. 2      ג. 3      ד. 4      ה. אין זהות נוספת כזו.

13 תהי A קבוצה המכילה את המספר 2, ומקיימת את שתי הדרישות הבאות:

1. אם n ב-A, אז גם n+5 נמצא ב-A.

2. אם n ב-A, אז גם 3n נמצא ב-A.

איזה מן המספרים הבאים **לא חייב** להיות ב-A?

- א. 770      ב. 771      ג. 772      ד. 773      ה. 774

14 מספר 4 ספרתי נקרא **מצויין**, אם הוא בעל התכונה הבאה: ספרת האלפים שלו שווה למספר האפסים באותו מספר, ספרת המאות שלו שווה למספר ה-1 -דים המופיעים במספר, ספרת העשרות שלו שווה למספר ההופעות של הספרה 2, וספרת האחדות - למספר ההופעות של הספרה 3.

כמה מספרים מצויינים יש?

- א. 0      ב. 1      ג. 2      ד. 3      ה. 4



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים  
השלב השני

האולפניאדה המתמטית תש"ע - השלב השני



## חלק שני

בחלק זה שלוש שאלות. פתרי אותן, ורשמי פתרון מנומק. במקום שדרושה הוכחה, ספקי אותה. גם תשובות חלקיות תתקבלנה. את תשובותיך מלאי בהמשך הדף בו מופיעה השאלה. אם המקום אינו מספיק, המשיכי בציודו השני של הדף.

יעל ושירה משחקות במשחק הבא:

15

בתחילת המשחק מונחת לפניהן שקית ובה 770 (תש"ע) מטבעות. על השחקנית הפותחת להוציא מן השקית מספר מטבעות, לא פחות מ-1 ולא יותר מ-9, ולהניחן על השולחן. מכאן ואילך, כל שחקנית בתורה, מוציאה מהשקית לפחות מטבע אחת, ולא יותר ממספר המטבעות שכבר נמצאות על השולחן עד שלב זה, ומניחה גם אותן על השולחן. המשחק מסתיים כשמסיימים להניח את המטבעות. השחקנית שעושה את הצעד האחרון – מנצחת. יעל היא השחקנית הפותחת, ושירה – השחקנית השנייה. הראי כי יש לאחת מהן דרך להבטיח את ניצחונה מבלי שהאחרת תוכל למנוע זאת. מיהי השחקנית? וכיצד עליה לתכנן את מהלכיה? פרטי את המהלכים ונמקי.



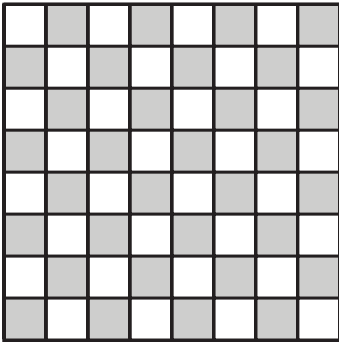
החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית תש"ע - השלב השני



16

נתון לוח שח רגיל. רושמים בכל אחת מ- 64 המשבצות שלו את אחד המספרים 0 או 1.  
אחר כך מסכמים את המספרים בכל שורה, בכל עמודה ובשני האלכסונים הראשיים. מתקבלת רשימה של 18 מספרים.  
הוכיחי כי ברשימה זו, יש מספר החוזר לפחות שלוש פעמים.





17 א. נתונים שני ישרים מקבילים, אחד מתחת לאחר. רוצים לסמן על הישרים 6 נקודות - חלק מהן על הישר העליון, וחלק על הישר התחתון. לאחר שמסמנים את הנקודות, מעבירים את כל הקטעים המחברים נקודות מסומנות על הישר העליון עם נקודות מסומנות על הישר התחתון. כיצד יש לחלק את 6 הנקודות, כך שיתקבל מספר מרבי של קטעים?

ב. נתונים שני ישרים מקבילים, אחד מתחת לאחר. רוצים לסמן על הישרים 2n נקודות - חלק מהן על הישר העליון, וחלק על הישר התחתון. לאחר שמסמנים את הנקודות, מעבירים את כל הקטעים המחברים נקודות מסומנות על הישר העליון עם נקודות מסומנות על הישר התחתון. כיצד יש לחלק את 2n הנקודות, כך שיתקבל מספר מרבי של קטעים? מהו מספר זה? הוכיחי את טענתך.

ג. מצאי את האיבר ה-20 בסדרה:  $0, 1, 9, 36, 100, 225, \dots$

ד. נתונים שני ישרים מקבילים אחד מעל האחר ו-2n נקודות, כך שמחציתן על הישר העליון ומחציתן על הישר התחתון. מעבירים את כל הקטעים המחברים נקודה על הישר העליון עם נקודה על הישר התחתון. חלק מקטעים אלו חותכים זה את זה בין שני הישרים המקבילים. אם נתון שאף שלושה מן הקטעים הללו אינם נפגשים בנקודה אחת. מה מספר נקודות החיתוך? הוכיחי את טענתך.





החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית תש"ע - השלב השני

