



# האולפניאדה המתמטית תשס"ז - שלב הגמר

בס"ד אדר תשס"ז

## משתתפת יקרה

אנו מברכים אותך על עלייתך לשלב הגמר של האולפניאדה המתמטית, ומאחלים לך הצלחה. בטרם תפני לשאלות, אנא מלאי את הפרטים שבעמוד זה.

בברכות,  
צוות האולפניאדה  
החוג למתמטיקה  
מכללה ירושלים

### לתלמידה:

שם המשתתפת: \_\_\_\_\_  
 הכיתה: \_\_\_\_\_ בית הספר: \_\_\_\_\_  
 הכתובת האישית: \_\_\_\_\_  
 מספר הטלפון \_\_\_\_\_ מספר הנייד \_\_\_\_\_  
 כתובת דוא"ל: \_\_\_\_\_

### לבת שרות לאומי:

שם המשתתפת: \_\_\_\_\_  
 מקום השרות: \_\_\_\_\_ בוגרת בית הספר: \_\_\_\_\_  
 הכתובת האישית: \_\_\_\_\_  
 מספר הטלפון \_\_\_\_\_ מספר הנייד \_\_\_\_\_  
 כתובת דוא"ל: \_\_\_\_\_

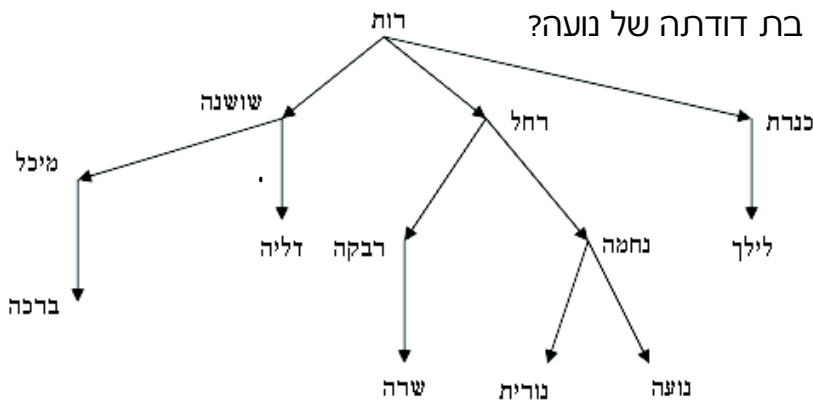
## האולפניאדה המתמטית תשס"ז - שלב הגמר

השאלון מכיל שני חלקים. הזמן הכולל לפתרון שני החלקים הוא  $3\frac{1}{2}$  שעות. אין להשתמש במחשבון!

### חלק א

בחלק הראשון 15 שאלות, לכל אחת מהן מוצעות 5 תשובות שרק אחת מהן נכונה. קראי בעיון את השאלות, פתרי אותן, וסמני בעיגול את התשובה הנכונה. ערכה של כל שאלה 6 נקודות.

1. בתרשים שלפניך רואים את העץ המשפחתי הנשי של נועה. החיצים מוליכים מאם לבתָּה.

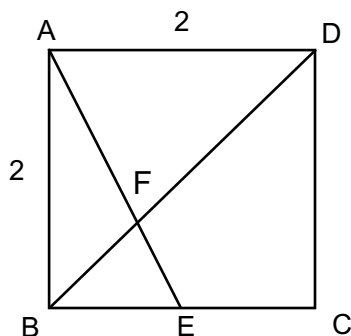


א ברכה ב שרה ג לילך ד נורית ה דליה

2. בדיוק בשבעה מימי חופשת החורף ירד גשם. בכל יום שירד גשם הוא ירד בבוקר או בערב אבל לא בשניהם. היו בדיוק חמישה ערבים בהם לא ירד גשם, ובדיוק שישה בקרים בהם לא ירד גשם. כמה ימים נמשכה חופשת החורף?

א 7 ב 8 ג 9 ד 10 ה 11

3. בצויר שלפניך ABCD הוא ריבוע שאורך צלעו 2. E היא אמצע הצלע BC.



שטח המשולש FBE הוא:

א  $\frac{1}{2}$  ב  $\frac{3}{5}$  ג  $\frac{2}{5}$  ד  $\frac{3}{8}$  ה  $\frac{1}{3}$



## האולפניאדה המתמטית תשס"ז - שלב הגמר

4.

בשלב השני של תחרות מתמטית היו 30 שאלות, שלכל אחת מהן הוצעו כמה תשובות. הניקוד על כל תשובה נכונה היה 5 נקודות, על כל תשובה שגויה - 0 נקודות, ועל כל שאלה שלא נענתה - נקודה אחת. אורית, בלהה, גלית, דינה והילה השתתפו בתחרות, וכל אחת מהן ניחשה את התוצאה שקיבלה.

אורית: קיבלתי 147 נקודות.

בלהה: קיבלתי 144 נקודות.

גלית: קיבלתי 143 נקודות.

דינה: קיבלתי 141 נקודות.

הילה: קיבלתי 139 נקודות.

התברר שרק אחת מהן קלעה לאמת. מיהי?

א אורית   ב בלהה   ג גלית   ד דינה   ה הילה

5.

השטח של שתי דפנות סמוכות של תיבה הוא 24 ו-36 סמ"ר. אם אורכה, רוחבה וגובהה של התיבה כולם מספרים טבעיים, מה מספר הערכים האפשריים של נפח התיבה?

א 2   ב 3   ג 4   ד 5   ה 6

6.

המספרים הטבעיים מסודרים בצורה המשולשית הבאה:

1						
2	3	4				
5	6	7	8	9		
10	11	12	13	14	15	16

בשורה הראשונה עומד המספר 1, בשורה השנייה עומדים המספרים 2,3,4, וכך הלאה (ראי לעיל). איזה מספר עומד במרכז של השורה ה-40?

א 1561   ב 1641   ג 1559   ד 1600   ה 1483

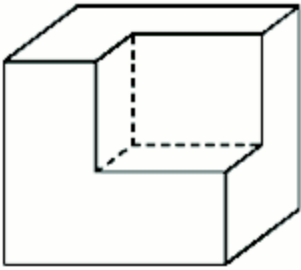
7.

יהיו  $a$  ו- $b$  שני מספרים ראשוניים כך שגם  $a+b$  וגם  $a-b$  הם מספרים ראשוניים. אזי סכום ארבעת המספרים הראשוניים:  $a+b+(a-b)+(a+b)$  הוא

א זוגי   ב מתחלק ב-3   ג מתחלק ב-5   ד מתחלק ב-7   ה ראשוני

# האולפניאדה המתמטית תשס"ז - שלב הגמר

8. נפחה של קובייה הוא 125 יחידות נפח. מן הקובייה חתכו תיבה קטנה כמתואר בציור.



מהו שטח הפנים של הצורה החדשה?

- א 120    ב 150    ג 180    ד 225    ה 250

9. אורית, בלהה, גלית, דינה והילה עומדות על היקף מעגל (לאו דווקא בסדר זה). לכל אחת מהן יש שתי שכנות במעגל, ורק אחת משכנות אלו קרובה אליה ביותר. כל אחת מחמש הבנות התבקשה להכריז את שמה של השכנה הקרובה אליה ביותר. שמותיהן של אורית ובלהה הוכרזו פעמיים, ושמה של גלית פעם אחת. איזו מהטענות הבאות נכונה?

א אורית ובלהה אינן עומדות בשכנות.

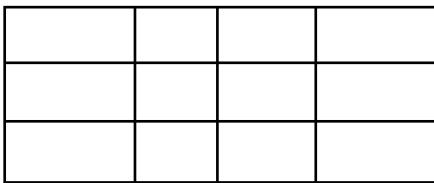
ב דינה והילה אינן עומדות בשכנות.

ג דינה והילה עומדות בשכנות.

ד דינה והילה עומדות שתיהן בשכנות לגלית.

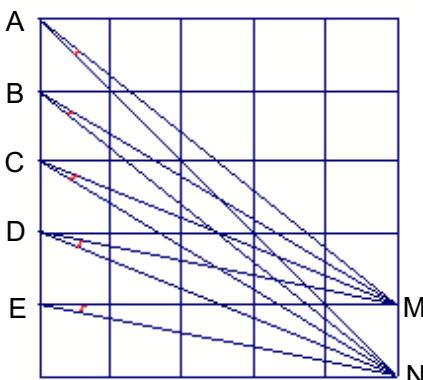
ה המצב שתואר לא ייתכן.

10. מה מספר המלבנים בציור הבא? (ריבוע נחשב גם הוא למלבן).



- א 12    ב 19    ג 60    ד 85    ה 120

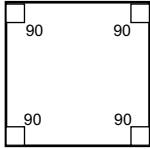
11. הריבוע הגדול שלפניך מחולק ל-25 משבצות ריבועיות. מהנקודות M ו-N שבציור, העבירו ישרים לנקודות A, B, C, D ו-E. מהו הסכום במעלות של הזוויות שנוצרו על ידי ישרים אלו בנקודות A, B, C, D ו-E?



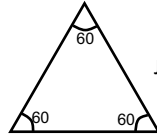
- א 30    ב 45    ג 60    ד 75    ה 90

## האולפניאדה המתמטית תשס"ז - שלב הגמר

12. במצולע משוכלל מסדר  $n$  יש  $n$  קדקודים ו- $n$  צלעות ( $n \geq 3$ ) כל הצלעות שוות אורך, וכל הזוויות הפנימיות שוות. בחלק מן המצולעים ערכי הזווית הפנימית היא מספר שלם, לדוגמה:



ריבוע



משולש שווה צלעות

מהו מספר הערכים  $n$ , שבעבורם גודל הזווית הפנימית הוא מספר שלם של מעלות?

- א 16    ב 18    ג 20    ד 22    ה 24

13. המספרים מ-1 ועד 15 מסודרים בשורה, כך שהסכום של כל שני מספרים סמוכים בשורה הוא ריבוע שלם. לדוגמה: 3, 6, 10 עשוי להיות קטע מן השורה. מהו המספר האמצעי בשורה?

- א 8    ב 1    ג 12    ד 15    ה 13

14. יהיו  $A, B, C, D$  ארבעה מספרים חיוביים, כך שאחד מהאי-שוויונים הבאים הוא שקרי, וכל הארבעה האחרים אמיתיים. מהו האי-שוויון השקרי?

- א  $A < B$     ב  $C < D$     ג  $A + C < B + C$     ד  $A + C < B + D$     ה  $A < B + C + D$

15.  $a, b, c$  הם אורכי הצלעות של משולש ישר זווית. נתון כי  $a, b, c$  הם מספרים שלמים, ו- $a < b < c$ , ו- $a + c = 49$ . מהו שטחו של המשולש?

- א 105    ב 140    ג 175    ד 210    ה 245

## האולפניאדה המתמטית תשס"ז - שלב הגמר

### חלק ב

בחלק השני 2 שאלות. פתרי אותן ורשמי פתרון מנומק. במקום שדרושה הוכחה, ספקי אותה. גם תשובות חלקיות תתקבלנה. ערכה של כל שאלה בחלק זה הוא 15 נקודות.

- 16.** נקודה במערכת צירים במישור נקראת **נקודת שריג** אם שני שיעוריה (שיעור  $x$  ושיעור  $y$ ) הם מספרים שלמים. לדוגמה: הנקודות  $(1,3)$ ,  $(-2,0)$  הן נקודות שריג, ואילו הנקודה  $(3, 1/2)$  אינה נקודת שריג. שתי נקודות שריג נקראות **שוות זוגיות**, אם לשיעורי ה- $x$  שלהן יש אותה זוגיות, ולשיעורי ה- $y$  שלהן יש אותה זוגיות. לדוגמה:  $(1,4)$  ו- $(-5,2)$  הן נקודות שוות זוגיות, והנקודות  $(1,4)$  ו- $(3,5)$  אינן שוות זוגיות.
- א.** הראי כי קטע המחבר שתי נקודות שריג שוות זוגיות, מכיל תמיד נקודת שריג נוספת.
- ב.** תני דוגמה לשתי נקודות שריג שונות שאינן שוות זוגיות, כך שהקטע המחבר אותן אינו מכיל שום נקודת שריג נוספת.
- ג.** תני דוגמה לשתי נקודות שריג שאינן שוות זוגיות, כך שהקטע המחבר אותן מכיל בכל זאת נקודת שריג נוספת.
- ד.** הוכיחי כי בהינתן חמש נקודות שריג כלשהן במישור, תמיד קיים קטע המחבר שתיים מן הנקודות, שפנימו מכיל נקודת שריג.
- ה.** חורשת ברושים נטועה בשדה, כך שעל כל נקודת שריג נטוע עץ. לכל שלושה עצים הנטועים על ישר אחד, העץ האמצעי מסתיר את שני הקיצוניים זה מזה. על חלק מהעצים מקננות ציפורים (על כל עץ ציפור אחת לכל היותר). אם כל שתי ציפורים רואות זו את זו (כלומר אם אין עץ מסתיר ביניהן) אז מספר הציפורים הוא לכל היותר  $\underline{\quad}$ . נמקי!

### פתרון:



## האולפניאדה החתומה תשס"ז - שלב הגמר

פתרון:



## האולפניאדה המתמטית תשס"ז - שלב הגמר

17.

התבונני בסדרה הבאה:  $\{4, 2, 3, 2, 4, 3, 1, 1\}$  זוהי סדרה שמכילה את המספרים 1, 2, 3 ו-4, כל מספר בדיוק פעמיים, כך שהמרחק בין המיקום של שני מספרים שווים הוא כערך המספר. למשל המספר 4 עומד במקומות הראשון והחמישי, שההפרש ביניהם הוא 4, כמו כן המרחק בין שתי ההופעות של המספר 2 הוא בדיוק 2. וכך הדבר ביחס ל-1 ול-3. סדרה זו נקראת **סדרת סקולם מסדר 4**.

באופן כללי: סדרת סקולם מסדר  $n$  היא סדרה בת  $2n$  איברים המכילה כל אחד מן המספרים 1, 2, 3, ...,  $n$ , בדיוק פעמיים, כך שהמרחק בין שני מספרים שווים, שווה בדיוק לערך המספר.

א. מצאי את כל סדרות סקולם מסדר 4.

ב. נמקי מדוע אין סדרת סקולם מסדר 3.

ג. במשבצות שלפנייך יש למקם סדרת סקולם מסדר 9, באופן שבין כל שני מספרים זוגיים שווים בסדרה זו, יש בדיוק מספר אי-זוגי אחד. שני מקומות כבר ממולאים.

		1															8
--	--	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---

השלימי את מילוי הסדרה. האם קיימות כמה השלמות?

ד. לפנייך הוכחה המנמקת מדוע אין סדרת סקולם מסדר 6: נניח שהצלחנו ליצור סדרה כזאת. נסמן ב- $m_1$  את המקום השמאלי של המספר 1 בסדרה, ב- $m_2$  את המקום השמאלי של המספר 2 בסדרה, וכך הלאה. אם  $m_1$  הוא המקום השמאלי של

המספר 1, אז ברור כי המקום הימני של המספר 1 הוא  $m_1+1$  (שהרי שני מספרי 1 סמוכים זה לזה!) באופן דומה, המקום הימני של המספר 2 הוא  $m_2+2$  ... והמקום הימני של המספר 6 הוא  $m_6+6$ . נחשב עתה את סכום כל מספרי המקומות. מצד אחד, המספרים משובצים במקומות 1 - 12, לפיכך סכום מספרי המקומות הוא כסכום המספרים הנ"ל, שהוא 78, מצד שני הסכום שווה ל-

$$m_1+(m_1+1)+m_2+(m_2+2)+\dots+m_6+(m_6+6)=2(m_1+m_2+\dots+m_6)+21$$

מספר זה הוא בעליל מספר אי-זוגי, בעוד ש-78 זוגי, וזה לא ייתכן. התבונני בהוכחה, ונסי באמצעותה למצוא ערכים נוספים של  $n$  שבעבורם אין סדרת סקולם

**פתרון:**





# האולפניאדה החתמטית תשס"ז - שלב הגמר

פתרון:

		1																	8
--	--	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---

		1																	8
--	--	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---

		1																	8
--	--	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---