



# האולפניאדה המתמטית תשס"ז - שלב ב'

בס"ד טבת תשס"ז

## משתתפת יקרה

אנו מברכים אותך על עלייתך לשלב השני של האולפניאדה המתמטית, ומאחלים לך הצלחה בהמשך התחרות. בטרם תפני לשאלות, אנא מלאי את הפרטים שבעמוד זה.

בהצלחה רבה.  
צוות האולפניאדה  
החוג למתמטיקה  
מכללה ירושלים

### לתלמידה:

שם המשתתפת: \_\_\_\_\_

הכיתה: \_\_\_\_\_ בית הספר: \_\_\_\_\_

הכתובת האישית: \_\_\_\_\_

מספר הטלפון \_\_\_\_\_ מספר הנייד \_\_\_\_\_

כתובת דוא"ל: \_\_\_\_\_

### לבת שרות לאומי:

שם המשתתפת: \_\_\_\_\_

מקום השרות: \_\_\_\_\_ בוגרת בית הספר: \_\_\_\_\_

הכתובת האישית: \_\_\_\_\_

מספר הטלפון \_\_\_\_\_ מספר הנייד \_\_\_\_\_

כתובת דוא"ל: \_\_\_\_\_

## האולפניאדה המתמטית תשס"ז - שלב ב'

השאלון מכיל שני חלקים. הזמן הכולל לפתרון שני החלקים הוא  $3\frac{1}{2}$  שעות. אין להשתמש במחשבון!

### חלק א

בחלק זה 14 שאלות, לכל אחת מהשאלות מוצעות 5 תשובות שרק אחת מהן נכונה. קראי בעיון את השאלות, פתרי אותן, וסמני בעיגול את התשובה הנכונה. (בחלק זה כל שאלה שווה 5 נקודות).

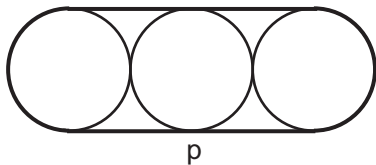
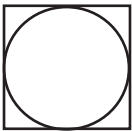
3		19
8		

1. ב"ריבוע הממוצעים" שלפניך הממולא בחלקו, כל מספר אמצעי בשורה, בעמודה או באלכסון הוא הממוצע של שני המספרים במשבצות שלידו (בשורה, בעמודה או באלכסון).

מהו המספר העומד במשבצת המרכזית?

- א 19    ב 11    ג 21    ד 16    ה לא ניתן להסיק מהנתונים

2. שטח הריבוע בתמונה שמשמאל הוא  $a$  ושטח העיגול החסום בו הוא  $b$ . מהו שטחה של הצורה המסומנת ב-P?



- א  $3a$     ב  $a+b$     ג  $3b$     ד  $a+2b$     ה  $2a+b$

3. המספרים 20, 150 ו- $n$  הם בעלי התכונה שמכפלת כל שניים מהם מתחלקת במספר השלישי. הערך המינימלי האפשרי של  $n$  הוא:

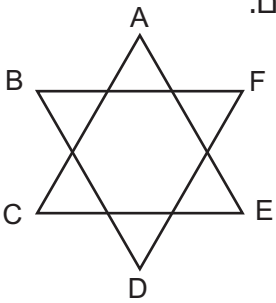
- א 15    ב 20    ג 30    ד 50    ה 60

## האולפניאדה המתמטית תשס"ז - שלב ב'

4. אורית, בתיה, גאולה ודינה השתתפו בשלב הראשון של האולפניאדה, והשיגו כל אחת תוצאה שונה. אורית אמרה: מבין ארבעתנו - לא סיימתי לא ראשונה ולא אחרונה. בתיה אמרה: מבין הארבע, לא הייתי אחרונה! גאולה אמרה: מבין הארבע, אני הגעתי למקום הראשון! דינה אמרה: מבין הארבע - אני הגעתי למקום האחרון! **בדיק** שלוש מן הבנות אמרו אמת. מי הגיעה ראשונה ומי אחרונה?

- א אורית ראשונה ובתיה אחרונה
- ב בתיה ראשונה ואורית אחרונה
- ג בתיה ראשונה וגאולה אחרונה
- ד גאולה ראשונה ודינה אחרונה
- ה בתיה ראשונה ודינה אחרונה

5. במגן דוד משוכלל כל המשולשים שסביב המשושה המרכזי הם משולשים שוויון צלעות חופפים.



אם שטח משולש ACE הוא 90, מהו שטח המגן דוד?

- א 180
- ב 160
- ג 150
- ד 140
- ה 120

6. צבעו כל אחת מצלעות קובייה באחד הצבעים אדום או כחול. נתון כי אין "דופן אדומה" ("דופן אדומה" היא דופן שכל ארבעת צלעותיה אדומות). מהו המספר המכסימלי האפשרי של צלעות אדומות?

- א 7
- ב 8
- ג 9
- ד 10
- ה 11

7. אם  $x$  הוא מספר שלם, מהו ההיקף של משולש שצלעותיו הם  $1, 2, x-1$ ?

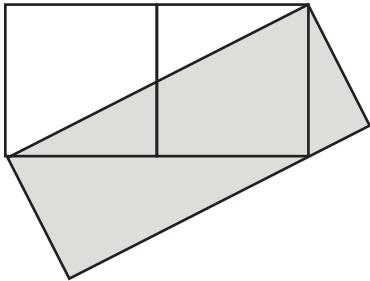
- א 4
- ב 5
- ג 6
- ד 7
- ה 8

האולפניאדה המתמטית תשס"ז - שלב ב'

8. מה ההפרש הגדול ביותר בין שני מספרים תלת-ספרתיים שכל ספרותיהם שונות?

- א 899    ב 885    ג 800    ד 100    ה 864

9. המלבן האופקי שלפניך מורכב משני ריבועים שאורך צלעותיהם 1. מהו שטחו של המלבן הנטוי (המסומן בציור)?



- א 2    ב 3    ג  $\sqrt{5}$     ד  $2\sqrt{5}$     ה  $2\sqrt{2}$

10. לקחו ארבעה מספרים טבעיים, וחיברו בכל פעם שלושה מהם. התקבלו התוצאות הבאות: 111, 160, 132, 173. הממוצע של ארבעת המספרים המקוריים הוא:

- א 144    ב 120    ג 64    ד 48    ה 36

11. בתרגיל הכפל הבא חסרות מרבית הספרות.

$$\begin{array}{r}
 \square\square\square \\
 \times \square\square \\
 \hline
 2\square\square\square \\
 \square\square 00 \\
 \hline
 15\square 7\square
 \end{array}$$

מהו סכום הספרות בכופל הדו ספרתי שבשורה השנייה?

- א 11    ב 12    ג 13    ד 14    ה 15



## האולפניאדה המתמטית תשס"ז - שלב ב'

**12.** באולפנת "עורי צפון" נגשו לשלב הראשון של האולפניאדה כיתות י' ו-י"א. אם  $\frac{3}{4}$  מבנות כיתה י' ו- $\frac{2}{3}$  מבנות כיתה י"א עברו לשלב השני, ומספר בנות כיתה י' שעברו לשלב השני שווה למספר בנות כיתה י"א שעברו לשלב השני, איזה חלק מהבנות שנגשו לשלב הראשון עברו לשלב השני?

א  $\frac{11}{16}$     ב  $\frac{12}{17}$     ג  $\frac{13}{18}$     ד  $\frac{14}{19}$     ה  $\frac{17}{23}$

**13.** כמה מספרים טבעיים (שלמים וחיוביים) קטנים מ-100 משאירים שארית 1 גם כשמחלקים אותם ב-5 וגם כשמחלקים אותם ב-7?

א 0    ב 1    ג 2    ד 3    ה 4

**14.** יהיו  $a < b < c < d$  מספרים כלשהם. מחשבים את הסכומים של ששת הזוגות האפשריים שניתן להרכיב מארבעה מספרים אלו, ומתקבלות שש תוצאות שונות. אם ארבע התוצאות הקטנות ביותר הן: 1, 2, 3 ו-4, אז מהם הערכים האפשריים ל-d?

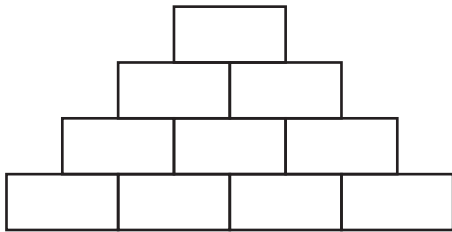
א 4 בלבד    ב 3 או 4    ג 3.5 או 4    ד 3.5 בלבד    ה לא ניתן להסיק.

## האולפניאדה המתמטית תשס"ז - שלב ב'

### חלק ב'

בחלק זה 3 שאלות. פתרי אותן ורשמי פתרון מנומק, במקום שדרושה הוכחה, ספקי אותה. גם תשובות חלקיות תתקבלנה. (בחלק זה כל שאלה שווה 10 נקודות.)  
את תשובותיך מלאי בהמשך הדף בו מופיעה השאלה, ואם המקום אינו מספיק, המשיכי בצידו השני של הדף.

15. בכל אחת ממשבצות הפירמידה שלפניך כתבו מספר שלם כך שהמספר הכתוב בכל אבן שווה לסכום המספרים הכתובים בשתי האבנים שמתחתיה.



- א. האם ניתן למלא את הפירמידה כך שתכלול רק מספרים זוגיים? אם כן, תני דוגמה אם לא - נמקי.
- ב. הראי שלא ניתן למלא את הפירמידה כך שתכלול רק מספרים אי-זוגיים.
- ג. מהו המספר המכסימלי של מספרים אי-זוגיים שניתן למלא בפירמידה. תני דוגמה לפירמידה מלאה שבה יש מספר כזה של מספרים אי-זוגיים. הוכיחי כי לא ניתן להשיג מספר גדול יותר.

### פתרון:



## האולפניאדה המתמטית תשס"ז - שלב ב'

**16. א.** כדור ירוק, כדור צהוב ושני כדורים אדומים נמצאים בשקית. מוציאים באקראי שני כדורים מצבעים שונים ובמקומם מכניסים כדור אחר בצבע השלישי (יש ברשותנו מלאי של כדורים בשלושת הצבעים). בשלב הבא שוב מוציאים מהשקית שני כדורים מצבעים שונים, ובמקומם שמים כדור מהצבע השלישי. התהליך מסתיים כאשר כל הכדורים שנותרו בשקית הם מאותו הצבע, או כאשר נותר כדור אחד בלבד. מה הצבע של הכדור/ים שנותרו/ו בשקית?

**ב.** 3 כדורים ירוקים, 4 צהובים ו-5 אדומים נתונים בשקית. שוב מבצעים אותו תהליך, ושוב מפסיקים כאשר בשקית יש כדור אחד או כמה כדורים מאותו הצבע. מה צבעו/ם של הכדור/ים שנותרו/ו?

**פתרון:**



## האולפניאדה המתמטית תשס"ז - שלב ב'

**17. א.** האם קיימים שני מספרים טבעיים עוקבים (מספרים שההפרש ביניהם הוא 1) כך שסכום הספרות של כל אחד מהם הוא זוגי? אם כן, תני דוגמה, אם לא - נמקי.

**ב.** האם קיימים שני מספרים טבעיים עוקבים, כך שסכום הספרות של כל אחד מהם מתחלק ב-3? אם כן, תני דוגמה, אם לא - נמקי.

**ג.** האם קיימים שני מספרים טבעיים עוקבים, כך שסכום הספרות של כל אחד מהם מתחלק ב-7 אם כן, תני דוגמה, אם לא - נמקי.

**ד.** נסחי טענה כללית ללא הוכחה על התחלקות אפשרית של סכום הספרות של שני מספרים טבעיים עוקבים.

**פתרון:**