



# האולפניאדה המתמטית תשס"ו - שלב הגמר

בס"ד ט' אייר תשס"ו

## משתתפת יקרה

אנו מברכים אותך על עלייתך לשלב הגמר של האולפניאדה המתמטית,  
בטרם תפני לשאלות, אנא מלאי את הפרטים שבעמוד זה.

בהצלחה רבה.

צוות האולפניאדה  
מכללה ירושלים

שם המשתתפת: \_\_\_\_\_

הכיתה: \_\_\_\_\_ בית הספר: \_\_\_\_\_

הכתובת האישית: \_\_\_\_\_

מספר הטלפון: \_\_\_\_\_



## האולפניאדה המתמטית תשס"ו - שלב הגמר

השאלון שלפנייך מורכב משני חלקים. בחלק הראשון 15 שאלות, לכל אחת מהן מוצעות 5 תשובות שרק אחת מהן נכונה. קראי בעיון את השאלות, פתרי אותן, וסמני בעיגול את התשובה הנכונה. ערכה של כל שאלה 6 נקודות.

בחלק השני 2 שאלות. פתרי אותן ורשמי פתרון מנומק, במקום שדרושה הוכחה, ספקי אותה. גם תשובות חלקיות תתקבלנה. ערכה של כל שאלה בחלק זה הוא 15 נקודות. הזמן העומד לרשותך הוא 3.5 שעות.

בהצלחה!

## חלק א

1. המילה "אולפניאדה" מצפינה מספר שבו כל ספרה מיוצגת על ידי אות, ולאותיות שונות מתאימות ספרות שונות. סכום ספרות המילה "אולפניאדה" הוא 53. מהן הספרות שאינן מופיעות ב"אולפניאדה"?

א 3 ו-5    ב 0 בלבד    ג 0 ו-1 בלבד    ד 0 ו-2    ה 1 בלבד

16			13
5		11	
		X	
4	15		1

2. בריבוע הקסם שלפנייך יש לשבץ את המספרים מ-1 ועד 16. חלק מהמספרים חסרים. (בריבוע קסם סכום המספרים בכל שורה, בכל עמודה ובכל אחד משני האלכסונים - שווה.) מהו המספר הנמצא במשבצת המסומנת ב-x?

א 7    ב 8    ג 9    ד 10    ה 12

3. אמין משקר בימים ראשון שלישי וחמישי, בשאר הימים הוא דובר אמת. חברו אמיתי - משקר בימים שני רביעי ושישי, ובשאר הימים הוא דובר אמת. היום נפגשו שניהם, וכך אמרו (לאו דווקא לפי הסדר):

איש א: אתמול שיקרת.

איש ב: מחר תשקרי!

באיזה יום התקיימה השיחה?

א ביום שלישי או חמישי    ב ביום שני    ג בשבת    ד ביום שישי    ה ביום ראשון



## האולפניאדה המתמטית תשס"ו - שלב הגמר

4. בתרגיל הכפל הבא חסרות חלק מן הספרות:

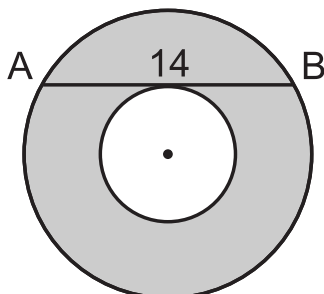
$$\begin{array}{r}
 \square \square \square \\
 \times \square \square \square \\
 \hline
 \phantom{\square \square \square} 3 \phantom{\square \square \square} 3 \phantom{\square \square \square} 6 \phantom{\square \square \square} 5 \\
 \square \square \square \square \\
 \square \square \square 2 \\
 \hline
 \square \square \square \square 2 \square
 \end{array}$$

מהו ערכה של הספרה שיש להציב במקומה של המשבצת האדומה?

- א 2      ב 3      ג 0      ד 4      ה 5

5. מהו ערכו של הסכום:  $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$  ?

- א 0      ב 5050      ג 10000      ד 1      ה 5000

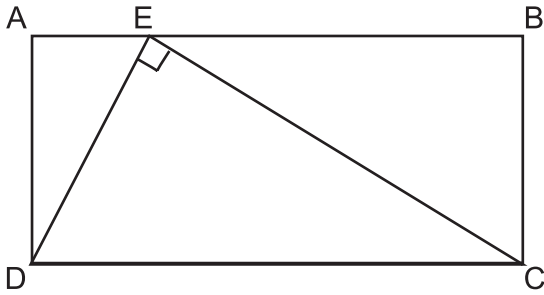


6. הטבעת שבציור מוגבלת על ידי שני מעגלים בעלי מרכז משותף. המיתר AB משיק למעגל הקטן, ואורכו 14. מהו שטח התחום הטבעתי האפור?

- א  $14\pi$       ב  $49\pi$       ג  $196\pi$       ד  $\pi$       ה  $7\pi$



## האולפניאדה המתמטית תשס"ו - שלב הגמר

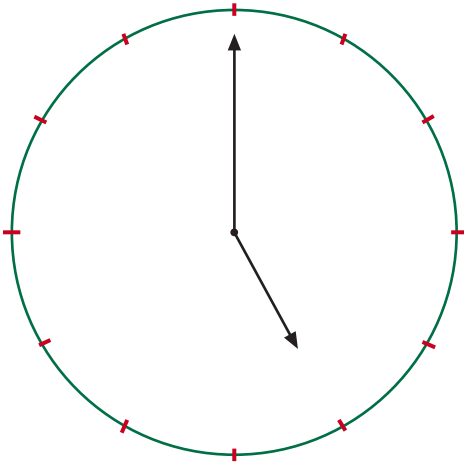


7. בציר שלפנייך משולש ישר זווית החסום במלבן ABCD.

נתון כי  $ED=3$   $EC=4$ .

מהו אורכו של BC?

- א 2.6    ב 2.4    ג 2.8    ד 1.8    ה 3.2



8. השעה עתה 5:00.

בעוד כמה דקות תהיה לראשונה הזווית שבין שני המחוגים ישרה?

- א 10    ב 11    ג 121/12    ד 120/11    ה 119/11

9. כמה מספרים ראשוניים  $p$  מקיימים את האי-שוויון  $55! + 1 < p < 55! + 56$  (המספר  $55!$  הוא מכפלת כל המספרים השלמים מ-1 ועד 55).

- א 0    ב 1    ג 2    ד 3    ה 4

10. מעבירים במעגל 7 מיתרים כך שכל שניים נחתכים בפנים המעגל וכך שאף שלושה מהם אינם נחתכים בנקודה אחת.

לכמה תחומים מתחלק פנים המעגל?

- א 25    ב 26    ג 27    ד 28    ה 29

11. נתונה קוביית עץ ושני צבעים אדום וירוק. צובעים את כל דפנות הקוביה.

כל דופן נצבעת בצבע יחיד.

שתי צביעות נחשבות זהות, אם ניתן להגיע מאחת לשנייה על ידי סיבוב של הקוביה.

למשל, ישנה רק צביעה אחת שבה דופן אחת אדומה ושאר הדפנות ירוקות.

מהו מספר הצביעות השונות של הקוביה?

- א 8    ב 10    ג 12    ד 14    ה 16



## האולפניאדה המתמטית תשס"ו - שלב הגמר

12. בעבור איזה מן הערכים הבאים של  $n$ , המספר  $4^n + 3^n + 2^n + 1^n$  אינו מתחלק ב-5?

א 1003    ב 1002    ג 1001    ד 1000    ה אף לא אחד.

13. הספרה השמאלית של מספר בן 2000 ספרות היא 3. נתון כי כל שתי ספרות סמוכות במספר יוצרות מספר דו ספרתי המתחלק ב-17 או ב-23. ספרת האחדות של המספר היא  $a$  או  $b$ . מה הערך של הסכום  $a+b$ ?

א 16    ב 8    ג 12    ד 7    ה 10

14. רחל ולאה צובעות במשותף איור. האיור מכיל 10 ציפורים ו-16 פרחים. רחל צובעת ציפור אחת ב-5 דקות, ופרח ב-3 דקות. לאה לעומתה צובעת ציפור אחת ב-6 דקות, ופרח ב-2 דקות. כל אחת מהן צובעת מספר שלם של ציפורים ופרחים. מהו המספר המינימאלי של דקות שדרוש להן להשלמת הצביעה?

א 41 דקות    ב 42 דקות    ג 43 דקות    ד 44 דקות    ה 45 דקות

15. כמה מספרים טבעיים הם בעלי התכונה שכאשר מחלקים את המספר 500 בהם, השארית היא 5?

א 6    ב 5    ג 100    ד 8    ה 9



## האולפניאדה המתמטית תשס"ו - שלב הגמר

## חלק ב

16. סדרת מספרים:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$  תיקרא **ספח"ת** (סדרת הפחתות חיובית תמיד), אם היא בעלת התכונות הבאות:

- א. כל איברי הסדרה שלמים וחיוביים.
- ב. כל איבר החל באיבר השלישי הוא הפרש שני הקודמים לו, כלומר:  $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$  לכל  $n$  טבעי.
- ג. האיבר האחרון גדול או שווה לקודם לו ( $a_{k-1} - a_k \leq 0$ ), כלומר אין אפשרות להאריך את הסדרה כך שכל איבריה יישארו חיוביים.

דוגמאות: הסדרה 23, 15, 8, 7, 1, 6 היא ספח"ת באורך 6.  
30, 20, 10, 10 היא ספח"ת באורך 4.

1. מהי הספח"ת הארוכה ביותר שאיברה הראשון הוא 150? נמקי!
2. מהי הספח"ת הארוכה ביותר שאיברה הראשון קטן או שווה 150?

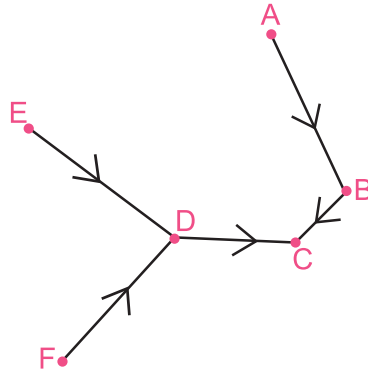
פתרון:



## האולפניאדה המתמטית תשס"ו - שלב הגמר

**17.** באולפניאדה המתמטית השתתפו תלמידות מאולפנות בכל רחבי הארץ.

האולפנות יוצרות מפה של נקודות. מעבירים במפה זו קווים מכוונים בין חלק מהנקודות כדלקמן: מכל אחת מהנקודות מעבירים חץ לנקודה הקרובה לה ביותר (מתברר שהמרחקים בין האולפנות שונים זה מזה כך שלכל נקודה יש נקודה אחת הקרובה לה ביותר). הנה חלק ממפה כזו לדוגמה:



שימי לב:

- א. ייתכן שאולפנא B היא הקרובה ביותר לאולפנא A, אך A אינה הקרובה ביותר ל-B (ראי בציור)
- ב. ייתכן ש-D היא האולפנא הקרובה ביותר לכמה אולפנות, כלומר ישנם במפה כמה חיצים שמגיעים ל-D (ראי בציור).

הוכיחי את הטענות הבאות:

1. במפת האולפנות הנ"ל אין "משולשים". (כלומר לא קיימות שלוש נקודות A, B ו-C כך שיש חץ מ-A ל-B, חץ מ-B ל-C, וחץ מ-C ל-A).
2. במפה אין שני חיצים שחותכים זה את זה בפנימם.
3. תהי P נקודה כלשהי המייצגת אולפנא. אזי לא ייתכן שיגיעו ל-P יותר מחמישה חיצים.

**פתרון:**



# האולפניאדה המתמטית תשס"ו - שלב הגמר

המשך פתרון: