



האולפניאדה המתמטית תשס"ו - השלב השני

בס"ד אדר תשס"ו

משתתפת יקרה

אנו מברכים אותך על עלייתך לשלב השני של האולפניאדה המתמטית, ומאחלים לך הצלחה בהמשך התחרות. בטרם תפני לשאלות, אנא מלאי את הפרטים שבעמוד זה.

בהצלחה רבה.

צוות האולפניאדה
מכללה ירושלים

שם המשתתפת: _____
הכיתה: _____ בית הספר: _____
הכתובת האישית: _____
מספר הטלפון: _____



האולפניאדה המתמטית תשס"ו - השלב השני

השאלון שלפניך מורכב משני חלקים. בחלק הראשון 14 שאלות, לכל אחת מהן מוצעות 5 תשובות שרק אחת מהן נכונה. קראי בעיון את השאלות, פתרי אותן, וסמני בעיגול את התשובה הנכונה. בחלק השני 3 שאלות. פתרי אותן ורשמי פתרון מנומק, במקום שדרושה הוכחה, ספקי אותה. גם תשובות חלקיות תתקבלנה. הזמן העומד לרשותך הוא 3 שעות. בהצלחה!

חלק א

1			
2			
	3		
	4		

1. בטבלה שלפניך, הממולאת בחלקה, יש להציב את הספרות 1 - 4 כך שבכל שורה ובכל עמודה תופענה כל ארבע הספרות. בכמה אופנים שונים ניתן להשלים טבלה זו?

- א 1 ב 2 ג 6 ד 4 ה 16

2. כל אחד מחמישה תלמידים בחר אחד מהמספרים בקבוצה {1, 2, 4}. אחר כך חישוב את מכפלת חמשת המספרים שנבחרו. מי מבין המספרים הבאים, יכול להיות תוצאת מכפלה זו?

- א 36 ב 2048 ג 256 ד 100 ה 4096

3. נתונים 100 תאים ריקים מסודרים בשורה. מכניסים מטבעות שוקולד לתאים באופן הבא: בשלב הראשון מוסיפים מטבע אחת לכל אחד מהתאים, בשלב השני מוסיפים מטבע נוספת לכל תא שמקומו הסידורי הוא זוגי, בשלב השלישי מוסיפים מטבע לכל תא שמקומו הסידורי מתחלק ב-3, וכך ממשיכים עד השלב ה-100 בו מוסיפים מטבע אחת לתא ה-100. עם תום חלוקת מטבעות השוקולד, מה מספר המטבעות בתא ה-60?

- א 10 ב 11 ג 12 ד 60 ה 15

4. מהי החזקה הגבוהה ביותר של 2 שבה מתחלקת המכפלה: $51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot \dots \cdot 100$?

- א 6 ב 25 ג 38 ד 45 ה 50



האולפניאדה המתמטית תשס"ו - השלב השני

5. בשק נמצאים 99 כדורים משני צבעים. ידוע כי לפחות שניים מהם אדומים, ולפחות שניים מהם שחורים. אם מכל שלושה כדורים שנבחר, לפחות אחד הוא אדום, מהו מספר הכדורים השחורים?

א 33 ב לפחות 66 ג 2 ד 3 ה רוב הכדורים הם שחורים.

6. נתונה קבוצת המספרים הבאה: $\{1, 5, 9, 13\}$. לכל סידור אפשרי של המספרים (לאו דווקא לפי הגודל) מתבוננים במספר הראשון פחות השני ועוד השלישי פחות הרביעי. לדוגמה: בעבור הסידור $(5, 9, 1, 13)$ מתקבל הסכום: $5-9+1-13=-16$. מבצעים פעולה זו על כל אחד מהסידורים האפשריים של ארבעת המספרים. סכום כל התוצאות שהתקבלו הוא:

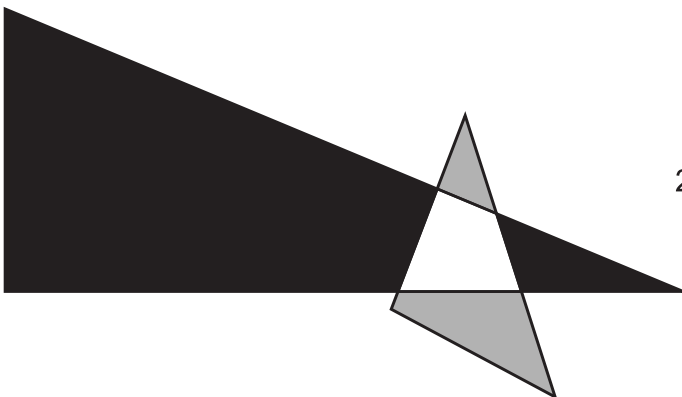
א 28 ב 16 ג 0 ד -2 ה 8

7. הממוצע של 10 מספרים טבעיים שונים, שהגדול שבהם שווה ל- k , הוא 10. מה יכול להיות הערך המזערי של k ?

א 10 ב 14 ג 15 ד 16 ה 20

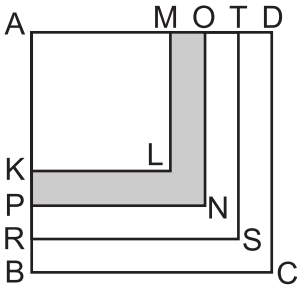
8. הציור שלפניך מורכב משני משולשים ישרי זווית שאורכי צלעותיהם הם מספרים שלמים, ואורך היתרים שלהם הם 5 ו-13. מה ההפרש בין שטח החלק השחור לבין שטח החלק האפור שבציור?

א 16 ב 22 ג 24 ד 25 ה 26



האולפניאדה המתמטית תשס"ו - השלב השני

9. ארבע פיסות נייר ריבועיות שצלעותיהן מספרים טבעיים אי זוגיים הונחו זו על גבי זו, באופן שמתקיים: $KP=PR=RB$. (ראי ציור).



אם ידוע כי השטח הצבוע באפור שווה ל-32, מהו שטח הריבוע ABCD?

- א 121
 ב 144
 ג 169
 ד 225
 ה 289

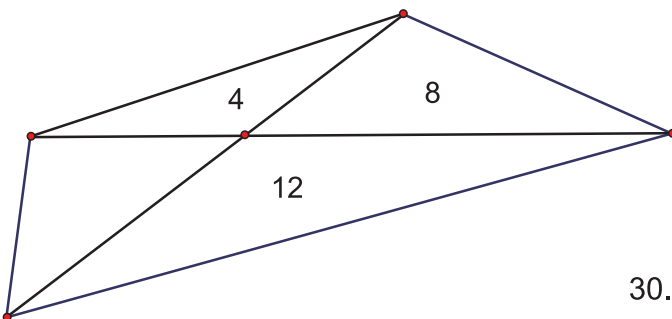
10. בימים א, ג, ה ושבת אהוד דובר אך אמת, ביתר ימי השבוע הוא דובר רק שקר. היום אמר אהוד ארבעה מתוך חמשת המשפטים הבאים:

1. מספר החברים שלי הוא מספר ראשוני.
2. מספר חברי המרכיבים משקפיים שווה למספר החברים שלי שאינם מרכיבים משקפיים.
3. שמי הוא אהוד.
4. אני תמיד דובר אך ורק אמת.
5. שלושה מחבריי לא הגיעו היום לבית הספר.

איזה משפט אהוד לא אמר היום?

- א משפט 1
 ב משפט 2
 ג משפט 3
 ד משפט 4
 ה משפט 5

11. במרובע שלפניך מחלקים האלכסונים את שטח המרובע (שאינו טרפז) לארבעה משולשים. שטחי שלושה מהם הם: 4, 8 ו-12 כמתואר בציור:



מהו שטח המרובע?

- א 28.5
 ב 29
 ג 29.5
 ד 30
 ה 30.5

**האולפניאדה המתמטית תשס"ו - השלב השני**

12. אם סכום הספרות של מספר טבעי n הוא 30, אז סכום הספרות של המספר $n+3$ אינו יכול אף פעם לשוות ל:

- א 6 ב 15 ג 21 ד 24 ה 33

13. סביב שולחן עגול יושבים 24 אנשים, חלקם (לא כולם) דוברים תמיד אמת, וחלקם (לא כולם) תמיד משקרים. כל אחד מהאנשים סביב השולחן טוען שהוא יושב בין דובר אמת לבין דובר שקר. מה מספרם של דוברי האמת סביב השולחן?

- א 16 ב 8 ג 12 ד 23 ה 10

14. על כל אחת מדפנותיה של קובייה רושמים מספר טבעי. אחר כך רושמים בכל אחד משמונת קדקודיה של הקובייה את מכפלת שלושת המספרים הרשומים על הדפנות הנוגעות בקדקוד זה. אם סכום כל המספרים הרשומים על הקדקודים הוא 70, מה סכום המספרים הרשומים על הדפנות?

- א 12 ב 35 ג 14 ד 10 ה 15



האולפניאדה המתמטית תשס"ו - השלב השני

חלק ב

15. מצאי את המספר הטבעי הקטן ביותר שמקיים את הדרישות הבאות:

א. ספרת האחדות של המספר היא 7.

ב. אם מוחקים את ספרת האחדות 7 של המספר ומוסיפים אותה בתחילת המספר (משמאל), מתקבל מספר הגדול פי 5 מהמספר המקורי.

פתרון:



האולפניאדה המתמטית תשס"ו - השלב השני

16. מצאי את כל שלשות המספרים a, b, c כך שאם מחברים כל אחד ממספרים אלו עם מכפלת שני האחרים - מקבלים את הערך 2.

פתרון:



האולפניאדה המתמטית תשס"ו - השלב השני

17. מהם כל המספרים הטבעיים n , בעבורם המכפלה:
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ מתחלקת בסכום: $1 + 2 + 3 + \dots + n$.
הוכיחי את טענתך.

פתרון: